Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1213–1218

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Calculus of Variations/Mathematical Problems in Mechanics

Local minimizers of one-dimensional variational problems and obstacle problems ☆

Mikhail A. Sychev

Laboratory of Differential Equations and Related Problems in Analysis, Sobolev Institute for Mathematics, Koptuyg Avenue 4, Novosibirsk 630090, Russia

Received 1 July 2007; accepted 8 July 2008

Available online 14 October 2008

Presented by John M. Ball

Abstract

In this Note we suggest a direct approach to study local minimizers of one-dimensional variational problems. ***To cite this article: M.A. Sychev, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Résumé

Minimiseurs locaux de problèmes variationnels en une dimension et de problémes d'obstacle. Dans cette Note nous suggérons une approche directe pour étudier les minimiseurs locaux de problèmes variationnels monodimensionnels. ***Pour citer cet article : M.A. Sychev, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Version française abrégée

On considère un problème de minimisation de la forme (1), (2). Nous considérons en premier lieu le problème d'obstacle (3). On suppose que la fonction L est convexe en v, et satisfait les hypothèses (H1) et (H2). Nos résultats concernant le problème d'obstacle sont les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. *Soit L vérifiant* (H1)–(H2) *et soient $c, \epsilon > 0$. Supposons $f > g$ tels que $\|f\|_{W^{1,\infty}}, \|g\|_{W^{1,\infty}} \leqslant c$.*

Alors il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que le problème (1)–(3) *avec $f(a) \geqslant A \geqslant g(a)$, $f(b) \geqslant B \geqslant g(b)$ ait une solution dans $W^{1,\infty}[a,b]$ dès que $\|f - g\|_C \leqslant \delta$. De plus, chaque solution u vérifie*

$$\|\dot{u}\|_{L^\infty} \leqslant \max\{\|\dot{f}\|_{L^\infty}, \|\dot{g}\|_{L^\infty}\} + \epsilon.$$

Une plus grande regularité de f, g (C^1 ou $C^{1,\alpha}$) se reporte sur u (C^1 ou $C^{1,\gamma}$). Ce résultat est uniforme en les fonctions L qui satisfont (H1)–(H2)*, pourvu que ces hypothèses soient verifiées uniformément dans l'ensemble $K_\nu = [a,b] \times [-c-\nu, c+\nu]^2$ pour un certain $\nu > 0$.*

☆ This work was supported by RFBR (project 06-08-00386) and by SB RAS (project 1.6).
E-mail address: masychev@math.nsc.ru.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.07.023

Ce théorème peut-être précisé lorsque L est C^3, voir Theorem 5.

Théorème 2. *Soit L satisfaisant* (H1)–(H2) *et soient $c, \alpha > 0$. On suppose $\|f\|_{C^{1,\alpha}}, \|g\|_{C^{1,\alpha}} \leqslant c$, $f > g$. Il existe $\delta > 0$ et $\bar{c}, \gamma > 0$ tels que chaque problème* (1)–(3) *où $f(a) \geqslant A \geqslant g(a)$, $f(b) \geqslant B \geqslant g(b)$ ait une solution C^1 pourvu que $\|f - g\|_C \leqslant \delta$. De plus, $\|u\|_{C^{1,\gamma}} \leqslant \bar{c}$. Ce résultat est uniforme en les fonctions L satisfaisant* (H1)–(H2) *uniformément dans un ν-voisinage, $\nu > 0$, d'un compact $K \subset \mathbf{R}^3$ contenant les graphes des fonctions f, g.*

Une première application du Théorème 2 est la correspondance entre minimiseurs locaux faibles et forts.

Théorème 3. *Si L satisfait* (H1)–(H2)*, tout minimiseur local faible est $C^{1,\alpha}$ pour un $\alpha > 0$ adéquat et est un minimiseur local fort. De plus tout minimiseur local faible isolé est fort.*

Une autre application du Théorème 2 est la suivante :

Théorème 4. *Soit L satisfaisant* (H1)–(H2) *et u un minimiseur local isolé de* (1), (2)*. Supposons que L_n vérifie* (H1)–(H2) *uniformément en n dans un voisinage V_ϵ du graphe de u (voir Theorem* 4*). Si $\|L_n - L\|_{C(V_\epsilon)} \to 0$ alors il existe des minimiseurs locaux u_n des problèmes* (1), (2)$_n$ *tels que $\|u_n - u\|_{C^1} \to 0$.*

Dans le cas $L \in C^3$, la théorie classique montre sous des hypothèses de convexité adéquate que l'équation d'Euler–Lagrange est vérifiée et implique (5). On montre finalement l'alternative suivante :

Théorème 5. *Soit $L \in C^3$ tel que $L_{vv} > 0$ et u un minimiseur local de* (1), (2)*. La situation est l'une de celles décrite ci-dessous* :

(i) *il existe des solutions u_n^+, u_n^- de* (5) *telles que $u_n^+ > u > u_n^-$, avec u_n^+ décroissante en n, u_n^- croissante en n, telles que $\|u_n^+ - u\|_{C^1}, \|u_n^- - u\|_{C^1} \to 0$ lorsque $n \to \infty$* ;
(ii) *Pour un certain $\epsilon > 0$, toutes les solutions des problèmes de Cauchy $w(a) = A$, $\dot{w}(a) = \alpha$, $\alpha \in [\dot{u}(a), \dot{u}(a) + \epsilon]$ de* (5) *vérifient à la fois* (2) *et l'égalité $J(w) = J(u)$, et il existe une suite croissante u_n^- de solutions de* (5) *telles que $u_n^- < u$ et $\|u_n^- - u\|_{C^1} \to 0$* ;
(iii) *Pour un certain $\epsilon > 0$, toutes les solutions des problèmes de Cauchy $w(a) = A$, $\dot{w}(a) = \alpha$, $\alpha \in [\dot{u}(a) - \epsilon, \dot{u}(a)]$ de* (5) *satisfont à la fois* (2) *et l'egalité $J(w) = J(u)$, et il existe une suite décroissante u_n^+ de solution de* (5) *telles que $u_n^+ > u$ et $\|u_n^+ - u\|_{C^1} \to 0$* ;
(iv) *Pour un certain $\epsilon > 0$, toutes les solutions des problèmes de Cauchy $w(a) = A$, $\dot{w}(a) = \alpha$, $\alpha \in [\dot{u}(a) - \epsilon, \dot{u}(a) + \epsilon]$ de* (5) *satisfont à la fois* (2) *et l'identité $J(w) = J(u)$.*

1. Introduction

Consider a minimization problem

$$J(u) = \int_a^b L\big(x, u(x), \dot{u}(x)\big)\,\mathrm{d}x \to \min, \quad L(x, u, v) : [a, b] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B, \quad u : [a, b] \to \mathbf{R}. \tag{2}$$

Recall that $u \in C^1[a, b]$ is called a weak local minimizer (an isolated weak local minimizer) of the problem (1), (2) if (2) holds and there exists $\epsilon > 0$ such that $J(u) \leqslant J(w)$ ($J(u) < J(w)$) for any $w \in C^1[a, b]$ that satisfies (2), $w \neq u$ and $\|u - w\|_{C^1[a,b]} \leqslant \epsilon$. A function $u \in C^1[a, b]$ is called a strong local minimizer (an isolated strong local minimizer) of the problem (1), (2) if (2) holds and for some $\epsilon > 0$ we can guarantee that $J(u) \leqslant J(w)$ ($J(u) < J(w)$) for all $w \in C^1[a, b]$ such that w satisfies (2), $w \neq u$ and $\|u - w\|_{C[a,b]} \leqslant \epsilon$. Any strong local minimizer is obviously a weak local minimizer. Strong local minimizers are solutions of the problem (1)–(3) in the class C^1, where

$$g \leqslant u \leqslant f, \quad f, g : [a, b] \to \mathbf{R}, \tag{3}$$

for appropriate f, g, say for $g = u - \epsilon$, $f = u + \epsilon$ with $\epsilon > 0$ sufficiently small.