Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 545–550

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Group Theory

Asymptotic aspects of Schreier graphs and Hanoi Towers groups

Rostislav Grigorchuk [1], Zoran Šunić

Department of Mathematics, Texas A&M University, MS-3368, College Station, TX, 77843-3368, USA

Received and accepted 30 January 2006

Presented by Étienne Ghys

Abstract

We present relations between growth, growth of diameters and the rate of vanishing of the spectral gap in Schreier graphs of automaton groups. In particular, we introduce a series of examples, called Hanoi Towers groups since they model the well known Hanoi Towers Problem, that illustrate some of the possible types of behavior. ***To cite this article: R. Grigorchuk, Z. Šunić, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Résumé

Aspects asymptotiques des graphes de Schreier et groupes des Tours de Hanoï. On montre quelques relations entre la croissance, la croissance des diamètres et la vitesse avec laquelle le trou spectral dans les graphes de Schreier des groupes automatiques tend vers zéro. En particulier, on introduit un certain nombre d'exemples, les groupes dits des Tours de Hanoï car ils donnent un modèle du célèbre problème des Tours de Hanoï, et qui illustrent des types possibles de comportement. ***Pour citer cet article : R. Grigorchuk, Z. Šunić, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Version française abrégée

Étant donnée une permutation $\pi \in \mathsf{S}_k$ on définit un automorphisme $a = a_\pi$ du k-arbre enraciné en posant $a = \pi\ (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$, où a_i est l'automorphisme identité si i est dans le support de π et $a_i = a$ sinon. L'action de l'automorphisme $a_{(ij)}$ sur l'arbre est donnée (récursivement) par (1). Le *groupe des Tours de Hanoï sur k piquets*, $k \geqslant 3$, est le groupe $H^{(k)} = \langle \{a_{(ij)} \mid 0 \leqslant i < j \leqslant k-1\} \rangle$ des automorphismes du k-arbre engendré par les $a_{(ij)}$, $0 \leqslant i < j \leqslant k-1$. Le groupe $H^{(k)}$ doit son nom au fait qu'il modèle le problème bien connu des Tours de Hanoï sur k piquets (voir [6,14]). L'action de l'automorphisme $a_{(ij)}$ correspond à un déplacement entre les piquets i et j.

Théorème 0.1. *$H^{(3)}$ est contractant et régulièrement branché sur son groupe des commutateurs.*

E-mail addresses: grigorch@math.tamu.edu (R. Grigorchuk), sunik@math.tamu.edu (Z. Šunić).
[1] Partially supported by NSF grants DMS-0308985 and DMS-0456185.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.02.001

Soit $A = (S, X, \tau, \rho)$ un automate, $G = G(A)$ le groupe d'automate correspondant qui agit sur le k-arbre enraciné, soit ξ un rayon géodésique infini commençant à la racine, soit ξ_n le préfixe de ξ de longueur n, soit P_ξ le stabilisateur $\mathsf{St}_G(\xi)$ et soit P_n le stabilisateur $\mathsf{St}_G(\xi_n)$, pour $n = 0, 1, \dots$. Dénotons par Γ_ξ (ou simplement par Γ) le graphe de Schreier $\Gamma = \Gamma(G, P_\xi, S)$ et par Γ_n le graphe de Schreier $\Gamma_n = \Gamma_n(G, P_n, S)$. Par exemple, dans le cas du groupe de Hanoï sur 3 piquets $H^{(3)}$, le graphe de Schreier Γ_3 est donné en Fig. 1 (les automorphismes $a_{(01)}$, $a_{(02)}$ et $a_{(12)}$ sont dénotés a, b et c, respectivement).

La croissance de Γ peut être exponentielle, intermédiaire ou polynomiale.

Théorème 0.2. *Pour le groupe des Tours de Hanoï $H^{(k)}$, $k \geqslant 4$, la croissance de $\Gamma_{000\dots}$ est intermédiaire.*

Dénotons par $d(n)$ le diamètre du graphe Γ_n. La croissance de la fonction $d(n)$ est exponentielle, intermédiaire ou polynomiale.

Théorème 0.3. *Pour le groupe des Tours de Hanoï $H^{(k)}$, $k \geqslant 3$, $d(n)$ est asymptotiquement* $\mathrm{e}^{n^{\frac{1}{k-2}}}$.

Soit T_n la matrice d'adjacence de Γ_n, soit $M_n = \frac{1}{|S \cup S^{-1}|} T_n$ l'opérateur de Markov correspondant, soit T la matrice d'adjacence de Γ et soit M l'opérateur de Markov correspondant. Le *spectre* de Γ_n (ou de Γ) est, par définition, le spectre de M_n (ou de M). Soit $\delta(n)$ le *trou spectral* $1 - \lambda(n)$, où $\lambda(n)$ est la plus grande valeur propre de Γ_n autre que 1. Le trou spectral peut être éloigné de 0 ($\{\Gamma_n\}$ forme une famille d'expanseurs) ou bien peut s'approcher de 0 de façon exponentielle, intermédiaire ou polynomiale.

Théorème 0.4. *Soit G le groupe des Tours de Hanoï sur 3 piquets $H^{(3)}$. Le spectre de Γ_n, en tant qu'ensemble, a $3 \cdot 2^{n-1} - 1$ éléments et est égal (quitte à changer l'échelle d'un facteur 3) à (2), où f est le polynôme $f(x) = x^2 - x - 3$. La multiplicité des 2^i valeurs propres dans $f^{-i}(0)$, pour $i = 0, \dots, n-1$, est a_{n-i}, et la multiplicité des 2^j valeurs propres dans $f^{-j}(-2)$, pour $j = 0, \dots, n-2$, est b_{n-j}, où $a_i = (3^{i-1} + 3)/2$ et $b_j = (3^{j-1} - 1)/2$, pour $i, j \geqslant 1$. Le spectre de $\Gamma_{000\dots}$, en tant qu'ensemble, est égal (à changement d'échelle d'un facteur 3 près) à (3). Il consiste en l'ensemble des points isolés $I = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}\{0\}$ et son ensemble de points d'adhérence J, qui est l'ensemble de Julia du polynôme f et est un ensemble de Cantor. La mesure spectrale KNS est discrète, concentrée en $\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}\{0, -2\}$, et la mesure des valeurs propres dans $f^{-i}\{0, -2\}$ est $1/(6 \cdot 3^i)$, pour $i = 0, 1, \dots$.*

1. Actions on rooted trees, automaton groups, and Hanoi Towers groups

The free monoid X^* of words over the alphabet $X = \{0, \dots, k-1\}$ ordered by the prefix relation has a k-regular rooted tree structure in which the empty word is the root and the words of length n constitute the level n in the tree. The k children of the vertex u are the vertices ux, for $x = 0, \dots, k-1$. Denote this k-regular rooted tree by $\mathcal{T}$. Any automorphism g of $\mathcal{T}$ can be (uniquely) decomposed as $g = \pi_g\ (g_0, g_1, \dots, g_{k-1})$, where $\pi_g \in \mathsf{S}_k$ is called the *root permutation* of g, and g_x, $x = 0, \dots, k-1$, are tree automorphisms, called the (first level) *sections* of g. The root permutation π_g and the sections g_i are determined uniquely by the relation $g(xw) = \pi_g(x) g_x(w)$, for all $x \in X$ and $w \in X^*$. The action of a tree automorphism can be extended to an isometric action on the boundary $\partial\mathcal{T}$ consisting of the infinite words over X. The space $\partial\mathcal{T}$ is a compact ultrametric space homeomorphic to a Cantor set.

For any permutation π in S_k define a k-ary tree automorphism $a = a_\pi$ by $a = \pi\ (a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$, where a_i is the identity automorphism if i is in the support of π and $a_i = a$ otherwise. The action of the automorphism $a_{(ij)}$ on $\mathcal{T}$ is given (recursively) by

$$a_{(ij)}(iw) = jw, \qquad a_{(ij)}(jw) = iw, \qquad a_{(ij)}(xw) = x a_{(ij)}(w), \quad \text{for } x \notin \{i, j\}. \tag{1}$$

Hanoi Towers group on k pegs, $k \geqslant 3$, is the group $H^{(k)} = \langle \{a_{(ij)} \mid 0 \leqslant i < j \leqslant k-1\} \rangle$ of k-ary tree automorphisms generated by the automorphisms $a_{(ij)}$, $0 \leqslant i < j \leqslant k-1$, corresponding to the transpositions in S_k. The group $H^{(k)}$ derives its name from the fact that it models the well known Hanoi Towers Problem on k pegs (see [6,14]). In this Problem, n disks of distinct sizes, enumerated $1, \dots, n$ by their size, are placed on k pegs, denoted $0, \dots, k-1$. Any configuration of disks is allowed as long as no disk is placed on top of a smaller disk. A legal move consists of moving the top disk from one peg to the top of another peg (as long as the new configuration is allowed). The n-disk