C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 519–522

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse complexe/Analyse harmonique

La série entière $1+\frac{z}{\Gamma(1+i)}+\frac{z^2}{\Gamma(1+2i)}+\frac{z^3}{\Gamma(1+3i)}+\cdots$ possède une frontière naturelle !

The power series $1+\frac{z}{\Gamma(1+i)}+\frac{z^2}{\Gamma(1+2i)}+\frac{z^3}{\Gamma(1+3i)}+\cdots$ *has a natural boundary!*

Changgui Zhang

Laboratoire P. Painlevé (UMR – CNRS 8524), UFR Math., université de Lille 1, cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 19 janvier 2011
Accepté après révision le 10 mars 2011
Disponible sur Internet le 6 avril 2011

Présenté par Jean-Pierre Demailly

RÉSUMÉ

Les séries lacunaires sont les exemples les plus classiques de séries entières qui ne peuvent pas se prolonger au delà de leurs cercles de convergence (Dienes, 1931 [4, §93–94, pp. 372–383], Titchmarsh, 1939 [8, §7.43, p. 223], ...). Dans la présente Note, nous étudions une famille de séries entières, non lacunaires, ayant pour coefficients des valeurs prises par la fonction Gamma sur des lignes verticales. Nous expliquons comment les représenter en termes de séries de Dirichlet lacunaires, ce qui nous permet de conclure à l'existence de leur frontière naturelle. Liés au comportement « aléatoire » de la fonction Gamma sur toute ligne verticale, les résultats ainsi obtenus verront également des explications dans notre travail en cours sur des équations aux q-différences-différentielles, dites « de type pantographe » (voir Kato and McLeod (1971) [6] pour l'instant).

ABSTRACT

The lacunary series are the most classic examples among all the power series whose circle of convergence constitutes a natural boundary (Dienes, 1931 [4, §93–94, pp. 372–383], Titchmarsh, 1939 [8, §7.43, p. 223], ...). In this Note, we study a family of non-lacunary power series whose coefficients are given by means of values of the Gamma function over vertical line. We explain how to transform these series into lacunary Dirichlet series, which allows us to conclude the existence of their natural boundary. Our results, which illustrate in what manner the Gamma function may have an unpredictable behaviour on any vertical line, may also be partially understood in the framework of our forthcoming work on a class of differential q-difference equations, namely, on pantograph type equations (meanwhile see Kato and McLeod (1971) [6]).

Dans un travail sur des équations linéaires fonctionnelles aux q-différences et différentielles (voir, pour l'instant, [6]), nous rencontrons une famille de séries de Laurent qui évoquent des valeurs de la fonction Gamma sur une ligne verticale. Le but de la présente Note est d'étudier leur prolongement analytique et de faire remarquer l'existence de la frontière naturelle.

Adresse e-mail : Changgui.zhang@math.univ-lille1.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.03.010

Bien que la question de la coupure analytique, en tant que sujet de recherche général, semble devenue « démodée », nos séries, à coefficients « explicites », fournissent néanmoins des exemples « concrets et naturels » de séries non lacunaires qui ne peuvent se prolonger au delà du disque de convergence. Selon une idée généralement reçue, depuis le travail d'E. Fabry [5], chez une série à frontière naturelle, les coefficients de cette dernière paraîtront comme étant « arbitrairement donnés ». Ainsi nos séries permettent-elles d'illustrer à quel point est « arbitraire » le comportement de $\Gamma(a+ib)$ lorsque b tend vers l'infini suivant une progression arithmétique. Voir l'article [1] pour une étude sur la convexité de $\log\Gamma(z)$ dans le plan complexe et, en particulier, sur une droite verticale de celui-ci.

Le reste de l'article comprendra deux paragraphes : le Théorème 1, notre principal résultat, sera énoncé dans le premier et sa démonstration sera faite dans le dernier.

1. Notations et énoncés

Les notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont standard.

(1.1) Soit $(u,v)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ tel que $u\notin -\mathbb{N}+\frac{2vi}{\pi}\mathbb{Z}$ et considérons la série de Laurent notée $\Psi(u,v,z)$, de la variable z, définie par

$$\Psi(u,v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma\left(u+\frac{2ivn}{\pi}\right)z^n .$$

D'après la formule de Stirling, on a (*cf.* [2, Corollary 1.4.4, p. 21]) :

$$\Gamma\left(u+\frac{2ivn}{\pi}\right)=O\left(n^{u-\frac{1}{2}}\,e^{-|vn|}\right)$$

lorsque l'indice n tend vers $\pm\infty$; on en déduit que, si $v\neq 0$, la série $\Psi(u,v,z)$ définit une fonction analytique dans la couronne $\mathcal{C}_v$ avec :

$$\mathcal{C}_v:=\left\{z\in\mathbb{C}\colon\ e^{-|v|}<|z|<e^{|v|}\right\}.$$

Soit $\mathbb{C}^+$ le demi-plan $\Re u>0$ de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^+$ la demi-droite $v>0$ de $\mathbb{R}$.

Théorème 1. *Pour tout couple $(u,v)\in\mathbb{C}^+\times\mathbb{R}^+$, la série $\Psi(u,v,z)$ admet $\partial\mathcal{C}_v$ pour frontière naturelle.*

(1.2) Ce théorème sera démontré dans le paragraphe 2 ; avant de faire ceci, nous nous contenterons de donner quelques conséquences du résultat.

D'abord, notons que la fonction $\Psi(u,v,z)$ satisfait aux relations suivantes :

$$\Psi(u+1,v,z)=\left(\frac{2vi}{\pi}\partial_z+u\right)\Psi(u,v,z),\qquad \Psi\left(u,v,\frac{1}{z}\right)=\Psi(u,-v,z),$$

lesquelles nous permettent d'étendre le Théorème 1 de la manière suivante :

Corollaire 1. *Pour tout couple $(u,v)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}^*$, si $u\notin -\mathbb{N}+\frac{2vi}{\pi}\mathbb{Z}$, alors la série de Laurent $\Psi(u,v,z)$ admet $\partial\mathcal{C}_v$ pour frontière naturelle.*

En considérant $\Psi(u,v,z)$ comme étant la somme d'une série entière de la variable z avec une série entière de $\frac{1}{z}$, nous déduisons aisément du Corollaire 1 le

Corollaire 2. *Soit $(u,v)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}^*$ tel que $-u\notin\mathbb{N}+\frac{2iv}{\pi}\mathbb{N}$. La série entière $\sum_{n\geqslant 0}\Gamma(u+\frac{2ivn}{\pi})z^n$ admet le cercle $|z|=e^{|v|}$ pour frontière naturelle.*

(1.3) D'après la formule du complément de Γ, on a la relation

$$\Gamma\left(u+\frac{2ivn}{\pi}\right)\Gamma\left(1-u-\frac{2ivn}{\pi}\right)=\frac{2\pi i}{e^{\pi ui-2vn}-e^{-\pi ui+2vn}},$$

ou encore :

$$\frac{2\pi i}{\Gamma(u+\frac{2ivn}{\pi})}=\left(e^{\pi ui-2vn}-e^{-\pi ui+2vn}\right)\Gamma\left(1-u-\frac{2ivn}{\pi}\right),$$

laquelle, combinée avec le Corollaire 2, nous conduit au résultat suivant, jusitifiant ainsi le titre de l'article :