C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 919–922

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Differential Geometry

Lie bialgebroids of generalized *CRF*-manifolds

Bi-algébroïdes de Lie des variétés CRF généralisées

Yat Sun Poon [a], Aïssa Wade [b]

[a] *Department of Mathematics, University of California at Riverside, CA 92521, USA*
[b] *Department of Mathematics, Penn State University, University Park, PA 16802, USA*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 22 July 2009
Accepted after revision 6 July 2010

Presented by Charles-Michel Marle

ABSTRACT

The notion of a generalized *CRF*-structure on a smooth manifold was recently introduced and studied by Vaisman (2008) [6]. An important class of generalized *CRF*-structures on an odd dimensional manifold M consists of *CRF*-structures having complementary frames of the form $\xi \pm \eta$, where ξ is a vector field and η is a 1-form on M with $\eta(\xi) = 1$. It turns out that these kinds of *CRF*-structures give rise to a special class of what we called strong generalized contact structures in Poon and Wade [5]. More precisely, we show that to any *CRF*-structures with complementary frames of the form $\xi \pm \eta$, there corresponds a canonical Lie bialgebroid. Finally, we explain the relationship between generalized contact structures and another generalization of the notion of a Cauchy–Riemann structure on a manifold.

RÉSUMÉ

La notion de structure *CRF* généralisée sur une variété lisse a été récemment introduite et étudiée par Vaisman (2008) [6]. Une classe importante de structures *CRF* généralisées sur une variété M de dimension impaire est constituée de structures *CRF* généralisées ayant des repères supplémentaires de la forme $\xi \pm \eta$, où ξ est un champ de vecteurs et η est une 1-forme differentielle sur M avec $\eta(\xi) = 1$. Il s'avère que ces types de structures *CRF* généralisées donnent lieu à une classe spéciale de structures que nous avons appelées des structures de contact généralisées fortes dans Poon et Wade [5]. Plus précisément, nous montrons qu'à toute structure *CRF* généralisée ayant des repères supplémentaires de la forme $\xi \pm \eta$, il correspond un bi-algèbroïde de Lie canonique. Finalement, nous expliquons la relation entre les structures de contact généralisées et une autre généralisation de la notion de structure-CR (Cauchy–Riemann) sur une variété.

Version française abrégée

Soit M une variété lisse. Il est connu que $TM \oplus T^*M$, muni du produit symétrique et du crochet de Courant (voir les formules (1) et (2) ci-dessous), est un algébroïde de Courant ainsi que son complexifié $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$.

Rappelons qu'une *F-structure généralisée* sur M, au sens de Vaisman (voir [6]), est la donnée d'un sous fibré E de rank k du fibré $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ qui est isotrope par rapport au produit symétrique et vérifie $E \cap \overline{E}^{\perp} = \{0\}$, où $\overline{E}^{\perp}$ est le

E-mail addresses: ypoon@math.ucr.edu (Y.S. Poon), wade@math.psu.edu (A. Wade).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.07.005

conjugué du supplémentaire orthogonal $E^{\perp}$ de E par rapport au produit symétrique (1) ci-dessous. Vaisman a montré que cette définition d'une F-structure généralisée est équivalente à la donnée d'un endomorphisme de fibrés $\Phi : TM \oplus T^*M \to TM \oplus T^*M$ tel que $\Phi + \Phi^* = 0$ et $\Phi^3 + \Phi = 0$ (voir [6]). Si en outre, l'espace des sections de E est stable pour le crochet de Courant, alors E est appelé une *structure CRF généralisée* [6]. Cette notion généralise à la fois les F-structures et les structures de Cauchy–Riemann classiques.

Nous nous intéressons aux F-structures généralisées Φ définies sur une variété lisse M de dimension impaire munie de sections globales $\xi \pm \eta$, où ξ est un champ de vecteurs et η est une 1-forme tels que $\eta(\xi) = 1$ sur M. Le couple $(\Phi, \xi + \eta)$ est appelé une *F-structure généralisée avec supplémentaires orthogonaux* (voir [6]). Deux couples $(\Phi, \xi + \eta)$ et $(\Phi', \xi' + \eta')$ sont dits équivalents s'il existe une fonction f qui ne s'annule en aucun point de M et telle que : $\eta' = f\eta$, $\xi' = \frac{1}{f}\xi$, $\Phi' = \Phi$.

Définition 0.1. *Une* structure presque de contact généralisée *sur M est la donnée d'une classe d'équivalence de tels couples* $(\Phi, \xi + \eta)$.

Toute F-structure généralisée Φ peut être représentée par une matrice dont les quatre blocs carrés sont $\varphi : TM \to TM$, $\pi^{\sharp} : T^*M \to TM$, $\theta^{\flat} : TM \to T^*M$ et $-\varphi^* : T^*M \to T^*M$, où φ est un tenseur de type $(1,1)$, π est un champ de bi-vecteurs et θ est une 2-forme sur M. Donc une structure presque de contact généralisée n'est rien d'autre qu'une classe d'équivalence de tenseurs $(\varphi, \pi, \theta, \xi, \eta)$ verifiant des conditions de compatibilité (voir les relations (3), (4) et (5) ci-dessous).

Considérons une structure de contact généralisée sur M représentée par le quintuplet $(\varphi, \pi, \theta, \xi, \eta)$ et définissons les fibrés vectoriels complexes :

$$E = \{e - i\Phi(e) \mid e \in \ker\eta \oplus \ker\xi\} \quad \text{et} \quad \bar{E} = \{e + i\Phi(e) \mid e \in \ker\eta \oplus \ker\xi\}.$$

Soit L_ξ le complexifié du fibré réel de rang 1 engendré par ξ et $L = L_\xi \oplus E$. Les fibrés vectoriels complexes E, $\bar{E}$, L et $\bar{L}$ sont indépendants du choix du représentant dans une classe d'équivalence fixée.

Toute structure presque de contact généralisée sur M dont le fibré associé L est intégrable (c'est-à-dire, l'espace $\Gamma(L)$ des sections de L est stable pour le crochet de Courant) est simplement appelée une *structure de contact généralisée*. Si L et L^* sont simultanément intégrables alors la structure de contact généralisée est dite *forte*.

A priori, l'intégrabilité de L n'implique pas celle de $E^{(1,0)}$. Cependant, nous montrons que la réciproque est vraie. Par ailleurs, étant donnée une structure de contact généralisée sur M, le couple (L, L^*) de fibrés vectoriels complexes associés détermine toujours un quasi-bialgébroïde de Lie, qui n'est pas nécessairement un bialgébroïde de Lie. Il est tout à fait naturel de se demander la question suivante : l'intégrabilité de E implique-t-elle que (L, L^*) est un bi-algébroïde de Lie ? L'étude de cette question a mené au résultat suivant :

Théorème 0.2. *Étant donnée une structure CRF généralisée Φ avec supplémen-taires orthogonaux $\xi \pm \eta$, le couple (L, L^*) de fibrés associés détermine un bi-algébroïde de Lie au dessus de M.*

En combinant le théorème précédent avec le Théorème 2.7 de [5], nous obtenons le corollaire ci-dessous. Nous renvoyons le lecteur à [5] pour plus de détails.

Corollaire 0.3. *Pour toute structure CRF généralisée Φ avec supplémentaires orthogonaux $\xi \pm \eta$, $\mathrm{d}\eta$ est de type $(1,1)$ par rapport au tenseur Φ défini sur $(\ker\eta \oplus \ker\xi) \otimes \mathbb{C}$.*

Nous montrons aussi que les structures de contact généralisées sont des F-structures au sens de Vaisman [6] et celles qui sont fortes sont des structures *CRF*. Par ailleurs, les structures de contact généralisées fortes donnent des structures de Cauchy–Riemann généralisées au sens de Li-Bland.

1. Generalized *CRF*-structures with complementary frames

Let M be a smooth manifold. The space $\Gamma(TM \oplus T^*M)$ of sections of the vector bundle $TM \oplus T^*M$ is endowed with two natural $\mathbb{R}$-bilinear operations: a symmetric bilinear operation $\langle\cdot,\cdot\rangle$ and the Courant bracket $[\![-,-]\!]$ given by:

$$\langle X + \alpha, Y + \beta\rangle = \frac{1}{2}(\iota_X\beta + \iota_Y\alpha), \tag{1}$$

$$[\![X + \alpha, Y + \beta]\!] = [X, Y] + \left(\mathcal{L}_X\beta - \mathcal{L}_Y\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{d}(\iota_X\beta - \iota_Y\alpha)\right). \tag{2}$$

The vector bundle $TM \oplus T^*M$ together with these two operations and the natural projection $\rho : TM \oplus T^*M \to TM$ form a fundamental example of *Courant algebroid* (see [1,3]) and ρ is called the *anchor map*. We will consider complexified bundles, and linearly extend the above symmetric form and the Courant bracket to obtain a complex Courant algebroid structure on $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$.