C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 941–945

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Calculus of Variations

A Modica–Mortola approximation for branched transport

Une approximation à la Modica–Mortola pour le transport branché

Filippo Santambrogio

CEREMADE, UMR CNRS 7534, Université Paris-Dauphine, place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France

ARTICLE INFO

Article history:
Received 14 June 2010
Accepted 16 July 2010
Available online 31 July 2010

Presented by Jean-Michel Bony

ABSTRACT

The M^α energy which is minimized in branched transport problems among singular 1-dimensional rectifiable vector measures with prescribed divergence is approximated by means of a sequence of elliptic energies, defined on more regular vector fields. The procedure recalls that of Modica–Mortola to approximate the perimeter, and the double-well potential is replaced by a concave power.

RÉSUMÉ

L'énergie M^α qui est minimisée dans les problèmes de transport branché parmi les mesures vectorielles (singulières et supportées sur des ensembles rectifiables de dimension 1) à divergence fixée est approximée par une suite d'énergies elliptiques, définies sur des champs de vecteurs plus réguliers. La procédure rappelle celle de Modica et Mortola pour le périmètre, et le potentiel à double puits est remplacé par une puissance concave.

Version française abrégée

Le nom « transport branché » s'est récemment affirmé pour appeler tous ces problèmes de transport où le coût pour une masse m qui parcourt une longueur l n'est pas proportionnel à la masse mais sous-additif et, typiquemment, proportionnel à une puissance m^α ($0 < \alpha < 1$). De cette manière le transport conjoint est favori, avec des effets de branchement vers les différentes destinations. Dans le cas des graphes finis ce genre de problème remonte aux années '60 (dans un cadre de recherche opérationnelle), alors que ses généralisations au continu viennent de la communauté du transport optimal et sont beaucoup plus récentes.

Un traitement numérique satisfaisant de ces questions est encore loin d'être réalisé et cela pose le problème de l'approximation de ce type d'énergie : cette note présente un résultat dans ce sens, dans le langage de la Γ-convergence (voir [6]). La formulation continue du problème de transport branché passe par une minimisation sous contraintes de divergence (voir (2)) et il est naturel de l'approcher par des problèmes qui portent sur des champs de vecteurs plus réguliers (qui ont une densité différentiable et qui tendent à se concentrer sur un graphe, sans être des mesures de type $\mathcal{H}^1$).

Des énergies avec un terme concave et un terme de Dirichlet (dont l'importance devient de plus en plus faible le long de la convergence) sont proposées en (4). L'idée de cette approximation est issue de discussions avec J.-M. Morel pour aboutir à des méthodes numériques efficaces ; la démonstration du résultat de convergence contenu dans cette note (disponible en ligne, [11]) sera présentée dans un papier avec E. Oudet [10]. Le même papier illustrera également les résultats numériques

E-mail address: filippo@ceremade.dauphine.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.07.016

qui peuvent être obtenus à l'aide de cette approximation, ainsi que les modifications à apporter à l'énoncé et à la preuve pour gérer le cas des exposants $\alpha \leqslant 1 - \frac{1}{d}$ (ce qui inclut des applications au problème de Steiner, correspondant à $\alpha = 0$). Minimiser ces énergies permet de passer par des méthodes de gradient (maîtrisées de manière opportune pour éviter dans la mesure du possible les minima locaux), plutôt que par les méthodes combinatoires très compliquées, qui caractérisent les approximations par les réseaux finis.

Au delà des applications numériques, l'intérêt de ce résultat vient aussi de sa comparaison avec la théorie de l'approximation elliptique des énergies singulières. Le cas de référence est l'approximation de la fonctionnelle perimètre par voie d'un potentiel à double et d'un terme de Dirichlet (voir (3)), un résultat obtenu par Modica et Mortola, [8], lors des premières années de la théorie de la Γ-convergence.

Les problèmes variationnels à considérer pour bien approcher celui du transport branché seraient de la forme (5). Pourtant, dans cette Note on ne présentera que le résultat de Γ-convergence des énergies (par rapport à la convergence faible des mesures et de leurs divergences), et ceci en dimension 2. Il reste à montrer que les contraintes de divergence peuvent être incorporées et que les minimiseurs des problèmes approchés satisfont des hypothèses de compacité, ce qui est plus délicat. De toute manière, on suggère une méthode pénalisée qui résout ces deux problèmes, tout en laissant ouvertes les deux questions. Également, le cas des dimensions supérieures reste ouvert.

Dans un vieil article, [4], dédié à des applications différentes, Bouchitté et al. donnent un résultat d'approximation très similaire pour des énergies définies sur les mesures atomiques. On peut dire que dans cette étude les réseaux 1D jouent le même rôle en 2D que les points jouaient en 1D en [4]. De plus, les mêmes auteurs sont en train d'étudier, par slicing, l'extension au transport branché : les techniques sont différentes de celles qui sont utilisés ici et en [10], mais les difficultés rencontrées sont plus ou moins les mêmes.

L'idée de cette Note est donc de présenter un type d'approximation, intéressant en soi et très prometteur en ce qui concerne les techniques et les applications, avec un résultat précis qui peut déjà s'appliquer dans certains cadres, mais qui demande aussi une étude ultérieure. Pour tous les détails et les nouveaux développements on renvoie à [10,11].

Les détails de la preuve (voir le Théorème 3.2 et les commentaires juste après) montreront également l'analogie des techniques avec les résultats de [8], analogie qui s'ajoute au fait que, dans les deux cas, on a affaire à des énergies intégrales qui concentrent à la limite sur une structure de dimension plus basse (dans ce cas, sur un graphe rectifiable qui constitue le réseau de transport).

1. Branched transport via divergence constraints

Let $\mathcal{M}(\Omega)$ be the set of finite vector measures on $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ with values in $\mathbb{R}^d$ and such that their divergence is a finite scalar measure. On this space we consider the following convergence: we write $u_\varepsilon \to u$ if u_ε and $\nabla \cdot u_\varepsilon$ weakly converge as measures to u and $\nabla \cdot u$, respectively. When a function is considered as an element of this space, or a functional space as a subset of it, we have always in mind absolutely continuous measures (with respect to the Lebesgue measure on Ω) and the functions represent their densities. When we take $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ and we write $u = U(M, \theta, \xi)$ we mean that u is a rectifiable vector measure (i.e. the translation in the language of vector measures of the concept of rectifiable currents) of the form $\theta\xi \cdot \mathcal{H}^1|_M$: the real multiplicity $\theta : M \to \mathbb{R}^+$ multiplied by the orientation $\xi : M \to \mathbb{R}^d$ is its density with respect to the $\mathcal{H}^1$-Hausdorff measure on the 1-rectifiable set M, and ξ is a measurable vector field of unit vectors belonging to the (approximate) tangent space to M at $\mathcal{H}^1$-almost any point.

For $0 < \alpha < 1$, we consider the energy

$$M^\alpha(u) = \begin{cases} \int_M \theta^\alpha \, d\mathcal{H}^1 & \text{if } u = U(M, \theta, \xi), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

The problem of branched transport, introduced in a continuous setting by Q. Xia in [12] and then studied by many authors (see for instance [2] for a whole presentation of the theory), amounts to minimizing M^α under a divergence constraint:

$$\min\{M^\alpha(u):\ \nabla \cdot u = f := f^+ - f^-\}. \tag{2}$$

The constraint is intended in weak form and means $\int \nabla\phi \cdot du = \int \phi \, d(f^- - f^+)$ for all $\phi \in C^1(\Omega)$, which actually corresponds to Neumann boundary conditions.

Problem (2) stands for the minimization of the energy of a movement bringing the mass from f^+ to f^-, where moving a mass m on a length l costs $m^\alpha l$. It admits a solution with finite energy for any pair of probability measures $(f^+, f^-) \in \mathcal{P}(\overline{\Omega})^2$, provided $\alpha > 1 - \frac{1}{d}$ (see [12]).

2. Variational approximation, preliminaries

The constraint being expressed in differential form it is natural to wonder whether we can approximate this minimization problem by means of more regular ones, where only "regular" measures u, with differentiable densities, are allowed.

In this paper we present a Γ-convergence result for a sequence of energies M^α_ε approximating M^α. Among possible applications, numerical procedures will be easier to perform on the approximated problems: this aspect, which is only the first interest for the results presented in this paper, will be developed in [10].