Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 377–382
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algebraic Geometry

On the D-affinity of quadrics in positive characteristic ☆

Alexander Samokhin

Institute for Information Transmission Problems, B. Karetnyj per., 19, 127994, Moscow, Russia

Received 30 December 2005; accepted after revision 6 January 2007

Available online 9 March 2007

Presented by Michel Raynaud

Abstract

In this Note we deal with the rings of differential operators on quadrics of low dimension in positive characteristic. We prove a vanishing theorem for the first term of the p-filtration on the rings of differential operators on such quadrics. Such a vanishing is a necessary condition for the D-affinity of these varieties. We also discuss applications of this result to derived categories of coherent sheaves. ***To cite this article: A. Samokhin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Résumé

Sur la D-affinité de quadriques en caractéristique positive. Dans cette Note nous étudions les anneaux des opérateurs différentiels sur les quadriques en petite dimension en caractéristique positive. Nous démontrons un théorème d'annulation pour le premier terme de la p-filtration sur les anneaux des opérateurs différentiels sur ces quadriques. Une telle annulation est une condition nécessaire pour que ces variétés soient D-affines. Enfin, nous discutons des applications de ce résultat à des catégories dérivées des faisceaux cohérents. ***Pour citer cet article : A. Samokhin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Version française abrégée

Soit X une variété lisse sur un corps k algébriquement clos de caractéristique quelconque, $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural de X, et $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X. On note $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ la catégorie des $\mathcal{D}$-modules (à gauche) qui sont quasi-cohérents comme des $\mathcal{O}_X$-modules. La variété X est dite D-affine si les deux conditions suivantes sont satisfaites : (i) pour chaque $\mathcal{F} \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ on a $H^k(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $k > 0$, et (ii) $\mathcal{F}$ est engendré par ces sections globales sur $\mathcal{D}_X$.

Beilinson et Bernstein ont démontré dans [3] que les espaces homogènes des groupes de Lie étaient D-affines si le corps k est de caractéristique zéro. Par contre, comme l'ont découvert Kashiwara et Lauritzen dans [9], les espaces homogènes en caractéristique positive ne sont pas D-affines en général. Dans cet article nous étudions les quadriques de dimension $\leqslant 4$ en caractéristique positive (ce sont les espaces homogènes du groupe orthogonal). Nous prouvons qu'une condition nécessaire est satisfaite pour que de telles quadriques soient D-affines. Ce théorème, qui est le résultat

☆ This work was supported in part by a French Government Fellowship and by the RFBR grant No. 02-01-22005.
E-mail address: sasha@math.univ-paris13.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.01.023

principal de cet article, est similaire à celui d'Andersen et Kaneda de [1] où le cas de la variété de drapeaux du groupe du type $\mathbf{B}_2$ a été traité.

1. Introduction

Throughout we fix an algebraically closed field k of characteristic p. Let X be a smooth variety over k, and $\mathsf{F}: X \to X$ the absolute Frobenius morphism. Note that since X is smooth, the sheaf $\mathsf{F}_*\mathcal{O}_X$ is locally free (here F_* is the direct image functor under F). Recall that the sheaf of differential operators $\mathcal{D}_X$ on X admits the p-filtration defined as follows. For $r \geqslant 1$ denote $\mathcal{D}_r$ the endomorphism bundle $End_{\mathcal{O}_X}(\mathsf{F}^r_*\mathcal{O}_X)$ (here $\mathsf{F}^r = \mathsf{F} \circ \cdots \circ \mathsf{F}$ is the r-iteration of F). Then $\mathcal{D}_X = \bigcup \mathcal{D}_r$. Recall that X is said to be Frobenius split if the sheaf $\mathcal{O}_X$ is a direct summand in $\mathsf{F}_*\mathcal{O}_X$. Homogeneous spaces of linear algebraic groups are Frobenius split [11]. For a Frobenius split variety X and for all $i \in \mathbb{N}$ the following property holds (Proposition, Sec. 1, [1]):

$$H^i(X, \mathcal{D}_X) = 0 \Leftrightarrow H^i(X, \mathcal{D}_r) = 0 \text{ for any } r \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Below we consider the case of smooth quadrics of dimension $\leqslant 4$, which are homogeneous spaces of orthogonal groups, and prove a necessary condition for these quadrics to be D-affine (cf. the main theorem of [1]):

Theorem 1.1. *Let Q_n be a quadric of dimension $n \leqslant 4$. Then $H^i(\mathsf{Q}_n, \mathcal{D}_1) = 0$ for $i > 0$.*

2. Preliminaries

Let X be a smooth variety over k, and $\mathrm{Coh}(X)$ the category of coherent sheaves on X. The direct image functor F_* has a right adjoint functor $\mathsf{F}^!$ in $\mathrm{Coh}(X)$ [8]. The duality theory for the finite flat morphism F yields [8]:

Lemma 2.1. *The functor $\mathsf{F}^!$ is isomorphic to*

$$\mathsf{F}^!(?) = \mathsf{F}^*(?) \otimes \omega_X^{1-p}, \tag{2}$$

where ω_X is the canonical invertible sheaf on X.

For any $i \geqslant 0$ one has an isomorphism, the sheaf $\mathsf{F}_*\mathcal{O}_X$ being locally free:

$$H^i\big(X, End_{\mathcal{O}_X}(\mathsf{F}_*\mathcal{O}_X)\big) = \mathrm{E}xt^i(\mathsf{F}_*\mathcal{O}_X, \mathsf{F}_*\mathcal{O}_X). \tag{3}$$

From Lemma 2.1 we obtain:

$$\mathrm{E}xt^i_X(\mathsf{F}_*\mathcal{O}_X, \mathsf{F}_*\mathcal{O}_X) = \mathrm{E}xt^i\big(\mathcal{O}_X, \mathsf{F}^!\mathsf{F}_*(\mathcal{O}_X)\big) = H^i\big(X, \mathsf{F}^*\mathsf{F}_*\mathcal{O}_X \otimes \omega_X^{1-p}\big). \tag{4}$$

Consider the fibered square:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X \arrow[d, "\mathsf{F}"] \\ X \arrow[r, "\mathsf{F}"] & X \end{tikzcd}$$

Let $i : \Delta \hookrightarrow X \times X$ be the diagonal embedding, and $\tilde{i}$ the embedding $\tilde{X} \hookrightarrow X \times X$ obtained from the above fibered square.

Lemma 2.2. *One has an isomorphism of sheaves*:

$$\tilde{i}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = (\mathsf{F} \times \mathsf{F})^*(i_*\mathcal{O}_\Delta). \tag{5}$$

Here $\mathsf{F} \times \mathsf{F}$ is the Frobenius morphism on $X \times X$. The lemma is equivalent to saying that the fibered product $\tilde{X}$ is isomorphic to the Frobenius neighbourhood of the diagonal $\Delta \subset X \times X$ (cf. [4]).