Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 647–651
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géometrie différentielle

L'opérateur de Dirac hypoelliptique

Jean-Michel Bismut

Département de mathématique, université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 6 octobre 2006 ; accepté le 10 octobre 2006

Disponible sur Internet le 7 novembre 2006

Présenté par Jean-Michel Bismut

Résumé

On annonce la construction d'une déformation de l'opérateur de Dirac sur une variété compacte spin en un opérateur de Dirac hypoelliptique sur l'espace total $\mathcal{X}$ du fibré tangent. Cette construction donne un analogue pour l'opérateur de Dirac d'une construction que nous avions effectuée pour le complexe de de Rham. Pour simplifier l'exposé, nous n'explicitons la construction que pour des variétés complexes. Nous construisons des métriques de Quillen hypoelliptiques, que nous comparons aux métriques de Quillen classiques. ***Pour citer cet article : J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

The hypoelliptic Dirac operator. We announce the construction of a deformation of the Dirac operator on a compact spin manifold into a hypoelliptic Dirac operator on the total space of the tangent space. This construction gives an analogue for the Dirac operator of a related deformation we already gave for the de Rham complex. For simplicity, we only explain the construction in the case of complex manifolds. We define hypoelliptic Quillen metrics, which we compare to the classical Quillen metrics. ***To cite this article: J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Introduction

Dans [2–4], nous avons construit une déformation de la théorie de Hodge ordinaire d'une variété compacte X, dont le Laplacien est un opérateur hypoelliptique sur l'espace total de T^*X. Ce Laplacien interpole en un sens adéquat entre le Laplacien de Hodge de Rham sur X, et le flot géodésique sur T^*X. Les propriétés analytiques de cette déformation ont été étudiées en détail par Lebeau et nous-même dans [9,10]. Dans ces mêmes références, nous avons aussi défini une métrique de Ray–Singer sur le déterminant de la cohomologie de de Rham d'un fibré plat sur X, et montré en particulier qu'elle coïncide avec la métrique de Ray–Singer elliptique.

Dans la présente note, nous annonçons la construction d'une déformation hypoelliptique de l'opérateur de Dirac sur une variété orientée compacte Riemanienne spin X. Nous explicitons cette construction pour les variétés complexes Kählériennes. Le Laplacien correspondant est un opérateur hypoelliptique d'ordre deux sur l'espace total $\mathcal{X}$ du fibré tangent à la variété considérée, qui interpole entre le carré de l'opérateur de Dirac elliptique sur X et le flot géodésique

Adresse e-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr (J.-M. Bismut).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.10.011

sur $\mathcal{X}$. Nous définissons une métrique de Quillen hypoelliptique sur le déterminant de la cohomologie d'un fibré holomorphe Hermitien E sur X, et nous donnons une formule qui compare cette métrique à la métrique de Quillen classique [7,13] sur X. Dans cette formule apparaît le genre R de Gillet–Soulé [11].

Les démonstrations des résultats annoncés sont données dans [5]. Les résultats y sont donnés également dans le contexte équivariant, et se rapportent aussi aux formes de torsion analytique holomorphe.

1. Le complexe de Dolbeault hypoelliptique

Soit X une variété compacte complexe de dimension n, et soit J la structure complexe correspondante sur $T_{\mathbf{R}}X$. Soit $\Lambda^{\cdot}(T^*X)$, $\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})$ les algèbres extérieures holomorphes et antiholomorphes de TX. Soit E un fibré holomorphe sur X. Soit $(\Omega^{(0,\cdot)}(X,E),\bar\partial^X)$ le complexe de Dolbeault des formes différentielles antiholomorphes tordues par E.

Soit $\pi:\mathcal{X}\to X$ l'espace total du fibré tangent holomorphe TX, soit y la section canonique de π^*TX sur $\mathcal{X}$. Dans la suite on identifie l'algèbre extérieure $\Lambda^{\cdot}(T^*X)$ à l'algèbre extérieure holomorphe de la fibre TX. Par contre on note par $\hat\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})$ l'algèbre extérieure antiholomorphe de la fibre TX. Ainsi $\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})\widehat{\otimes}\Lambda^{\cdot}(T^*X)$ est l'algèbre extérieure complexifiée de X, et $\hat\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})\widehat{\otimes}\Lambda^{\cdot}(T^*X)$ est l'algèbre extérieure complexifiée de la fibre TX. Soit $N^{H(1,0)}, N^{H(0,1)}, N^V$ les opérateurs de nombre sur $\Lambda^{\cdot}(T^*X)$, $\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})$, $\hat\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})$.

Soit $i:X\to\mathcal{X}$ le plongement de X dans $\mathcal{X}$ comme sous-variété des zéros de y. Le complexe de Koszul $(\pi^*\Lambda^{\cdot}(T^*X),i_y)$ donne une résolution de $i_*\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{X}$.

Soit $Y=y+\bar y$ la section de $T_{\mathbf{R}}X$ correspondant à la section y. On pose

$$A''_Y=\bar\partial^X+i_y. \tag{1}$$

On considère le complexe de formes à support compact

$$\big(\Omega^{(0,\cdot)}\big(\mathcal{X},\pi^*\big(\Lambda^{\cdot}(T^*X)\widehat{\otimes}E\big)\big),A''_Y\big),$$

qu'on gradue par l'opérateur $N^V+N^{H(0,1)}-N^{H(1,0)}$. Le morphisme

$$i^*:\big(\Omega^{(0,1)}\big(\mathcal{X},\pi^*\big(\Lambda^{\cdot}(T^*X)\widehat{\otimes}E\big)\big),A''_Y\big)\to\big(\Omega^{(0,\cdot)}(X,E),\bar\partial^X\big)$$

est un quasiisomorphisme de complexes $\mathbf{Z}$-gradués.

Soit g^{TX} une métrique Kählérienne sur X et soit ω^X la forme de Kähler, de telle sorte que $\omega^X(U,V)=\langle U,JV\rangle$. Soit ∇^{TX} la connexion holomorphe Hermitienne sur (TX,g^{TX}), et soit R^{TX} sa courbure. La connexion ∇^{TX} induit un sous fibré horizontal $T^H\mathcal{X}$ de $T\mathcal{X}$, de telle sorte qu'on a l'isomorphisme de fibrés C^∞,

$$T\mathcal{X}\simeq\pi^*(TX\oplus TX). \tag{2}$$

On en déduit un isomorphisme C^∞ de fibrés en algèbres,

$$\Lambda^{\cdot}\big(\overline{T^*\mathcal{X}}\big)\simeq\pi^*\big(\Lambda^{\cdot}\big(\overline{T^*X}\big)\widehat{\otimes}\hat\Lambda^{\cdot}\big(\overline{T^*X}\big)\big). \tag{3}$$

Notons qu'en utilisant l'isomorphisme (3), on peut écrire $\bar\partial^{\mathcal{X}}$ sous la forme,

$$\bar\partial^{\mathcal{X}}=\nabla^{\mathbf{I}''}+\bar\partial^V. \tag{4}$$

Dans (4), $\mathbf{I}^{\cdot}$ désigne le fibré des sections C^∞ de $\pi^*(\hat\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})\widehat{\otimes}E)$ le long des fibres TX, et $\nabla^{\mathbf{I}^{\cdot}\prime\prime}$ désigne la partie antiholomorphe de la connexion naturelle $\nabla^{\mathbf{I}^{\cdot}}$. De plus $\bar\partial^V$ est l'opérateur de Dolbeault de long des fibres. La formule (4) donne la décomposition de $\bar\partial^{\mathcal{X}}$ en la somme d'une partie horizontale et d'une partie verticale.

Soit $r:Y\to -Y$ l'involution évidente de $\mathcal{X}$. Alors r agit naturellement sur l'algèbre extérieure verticale $\Lambda^{\cdot}(T^*X)\widehat{\otimes}\hat\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})$.

Soit g^E une métrique Hermitienne sur E, soit ∇^E la connexion holomorphe associée sur E, et soit R^E sa courbure. La métrique g^{TX} induit une métrique sur $T\mathcal{X}\simeq\pi^*(TX\oplus TX)$. Soit $\langle\rangle_{L^2}$ le produit Hermitien sur $\Omega^{(0,\cdot)}(\mathcal{X},\pi^*(\Lambda^{\cdot}(T^*X)\widehat{\otimes}E))$ qui est associé à cette métrique ainsi qu'à g^E. Soit η la forme Hermitienne sur $\Omega^{(0,\cdot)}(\mathcal{X},\pi^*(\Lambda^{\cdot}(T^*X)\widehat{\otimes}E))$,

$$\eta(s,s')=(2\pi)^{-2n}\langle s,r^*s'\rangle_{L^2}. \tag{5}$$

Soit L l'opérateur de Hodge de multiplication par ω^X sur $\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})\widehat{\otimes}\Lambda^{\cdot}(T^*X)$, et soit Λ son adjoint. Soit ϵ la forme Hermitienne,

$$\epsilon(s,s')=\eta\big(e^{i\Lambda}s,e^{i\Lambda}s'\big). \tag{6}$$