

Une généralisation de l'intégrale stochastique de Wick–Itô

Daniel Alpay^{a,1}, Haim Attia^{a,b}, David Levanony^c

^a Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 84105, Israel

^b Department of Mathematics, Shamoon College of Engineering, Beer-Sheva, Israel

^c Department of Electrical Engineering, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 84105, Israel

Reçu le 20 septembre 2007 ; accepté le 29 janvier 2008

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

La fonction de covariance du mouvement brownien fractionnaire appartient à une famille de covariances introduite par Schoenberg dans les années 1930. Nous définissons une intégrale stochastique pour les processus gaussiens associés à une sous famille de ces covariances. *Pour citer cet article : D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A generalization of the Wick–Itô stochastic integral. The covariance of the fractional Brownian motion belongs to a family of positive functions introduced by Schoenberg in the 1930s. We show that one can define a stochastic integral for a large sub-family of the corresponding Gaussian second order stochastic processes. *To cite this article: D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In 1934, Paul Lévy introduced in his study of infinitely divisible probability laws and Gaussian processes with stationary and independent increments, functions of the form

$$r(t) = r_0 + i\gamma t - \int_{\mathbb{R}} \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{u^2 + 1} \right\} \frac{d\sigma(u)}{u^2} \quad (1)$$

where $r_0 = r(0)$ and γ are real numbers and where σ is a positive measure on $\mathbb{R}$ such that $\int_{\mathbb{R}} d\sigma(u)/(u^2 + 1) < \infty$; see [12]. For such a function, we note the formula

$$K_r(t, s) \stackrel{\text{def.}}{=} r(t) + r(s)^* - r(t - s) - r(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itu} - 1}{u} \frac{e^{-isu} - 1}{u} d\sigma(u),$$

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay), atyah@math.bgu.ac.il (H. Attia), levanony@ee.bgu.ac.il (D. Levanony).

¹ Earl Katz Family chair in algebraic system theory.

which expresses that $K_r(t, s)$ is a positive kernel on the real line, and allows one, when t, s are restricted to a symmetric finite interval, to express the associated reproducing kernel Hilbert space in terms of de Branges spaces of entire functions; see [5] for these spaces. Conversely, a function r such that K_r is positive has the form (1); for the real case, see the paper of von Neumann and Schoenberg [15, Theorem 1, p. 229]. Positive kernels of the form $K_r(t, s)$ have a long history; they seem to first appear in Schoenberg's 1935 paper [15]. When restricted to a finite symmetric interval they play an important role in Krein's work, see [11], and [10]. They also appear in the work of Beurling and Deny on Dirichlet spaces, see [3]. The kernels $K_r(t, s)$ may assume the role of covariance functions of stochastic Gaussian processes. The purpose of this note is to define a stochastic integral associated with these processes, when the function r is real and when σ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, with some appropriate hypothesis on σ' . The case $r(t) = (V_H/2)|t|^{2H}$ where $V_H = (\Gamma(2-2H)\cos(\pi H))/\pi(1-2H)H$ is of paramount importance, and corresponds to $\sigma'(u) = |u|^{1-2H}/2\pi$. The corresponding de Branges spaces are then called the homogeneous de Branges spaces, whose reproducing kernel is expressed in terms of the Bessel functions; see [5, p. 180]. When $H \neq 1/2$, the associated process is the fractional Brownian motion, first introduced by Kolmogorov. It is the classical Brownian motion when $H = 1/2$. The authors of [8] and [4] use the white noise probability space and Hida distributions to define a stochastic integral with respect to the fractional Brownian motion. We follow these arguments, and show that they still hold for the covariances K_r for a large family of absolutely continuous σ . The novelty in this Note is therefore not the method itself, but the fact that the given method applies to a wide range of stochastic processes, whose covariance functions play a key role in analysis and extension problems.

For other approaches to stochastic analysis of the fractional Brownian motion, we refer to [6]. We refer to [1] for stochastic analysis of another wide class of Gaussian stochastic processes, which contains the fractional Brownian motion as a special case.

1. L'espace de probabilité du bruit blanc et le produit de Wick

Soit $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions à décroissance rapide, et soit $\mathcal{S}'$ son dual. Notons $\mathcal{F}$ la tribu des boréliens de $\mathcal{S}'$. La fonction $K(s_1 - s_2) = \exp(-\|s_1 - s_2\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})}^2/2)$ est positive pour $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, et $\mathcal{S}$ est nucléaire; utilisant [9, Théorème 2, p. 342] nous voyons qu'il existe une mesure de probabilité P sur $(\mathcal{S}', \mathcal{F})$ telle que pour tout $s \in \mathcal{S}$,

$$E(e^{iQ_s}) = e^{-\frac{\|s\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})}^2}{2}},$$

où Q_s dénote la forme $Q_s(s') = \langle s, s' \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}'}$. Rappelons (voir [8, (2.3) p. 303]) que cette équation implique

$$E(Q_s) = 0 \quad \text{et} \quad E(Q_s^2) = \|s\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})}^2. \quad (2)$$

On appelle $\mathbf{L}_2(\mathcal{S}', \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité du bruit blanc. On peut écrire chaque élément $F \in \mathbf{L}_2(\mathcal{S}', \mathcal{F}, P)$ comme $F = \sum_{\alpha \in \ell} c_\alpha H_\alpha$, où les H_α forment une base orthogonale indexée par l'espace ℓ des suites finies de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, et les coefficients c_α sont tels que $\sum_{\alpha \in \ell} c_\alpha^2 \alpha! < \infty$. Nous ne rappelons pas la définition des H_α ici, mais notons qu'on les exprime en termes des fonctions de Hermite $\tilde{h}_n$; voir [8, p. 305] pour la définition de ces dernières. Les H_α sont munis du produit de Wick

$$H_\alpha \diamond H_\beta = H_{\alpha+\beta},$$

qui n'est pas sans rappeler le produit de Cauchy–Kovaleskaya utilisé pour définir des fonctions hyperholomorphes rationnelles; voir [2].

Rappelons que l'utilisation du produit de Wick pour définir une intégrale stochastique a pour origine le travail [7].

2. L'opérateur T_m

Soit m une fonction positive et mesurable, telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{m(u) du}{u^2 + 1} < \infty. \quad (3)$$

Nous dénoterons la transformée de Fourier par $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx$. L'opérateur T_m donné par la formule

$$\widehat{T_m f} = \sqrt{m} \hat{f} \quad (4)$$

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/4672394>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/4672394>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)