

Partial Differential Equations

On the perturbation of the electromagnetic energy
due to the presence of small inhomogeneitiesChristian Daveau^a, Abdessatar Khelifi^b^a Université de Cergy-Pontoise, département de mathématique, CNRS UMR 8088, 2, avenue Adolphe-Chauvin, 95302 Cergy-Pontoise, France^b Département de mathématiques, université des sciences de Carthage, Bizerte, 7021, Tunisia

Received 12 September 2007; accepted after revision 29 January 2008

Presented by Olivier Pironneau

Abstract

We consider solutions to the time-harmonic Maxwell problem in $\mathbf{R}^3$. For such solution we propose a rigorous derivation of the asymptotic expansions in the interesting practical situation when a finite number of inhomogeneities of small diameter are embedded in the entire space. Then, we describe the behavior of the electromagnetic energy caused by the presence of these inhomogeneities. *To cite this article: C. Daveau, A. Khelifi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Résumé

Sur la perturbation de l'énergie électromagnétique due à la présence d'inhomogénéités de petits diamètres. Nous considérons des solutions des équations de Maxwell dans $\mathbf{R}^3$ en présence d'un nombre fini d'inhomogénéités de petits diamètres. Pour de telles solutions, nous obtenons des formules asymptotiques rigoureuses. Puis, nous décrivons le comportement de l'énergie électromagnétique. *Pour citer cet article : C. Daveau, A. Khelifi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

L'objectif du travail décrit dans cette Note est de comprendre comment les solutions perturbées du problème (3) se comportent quand un nombre fini d'inhomogénéités $\{z_j + \alpha B_j\}$ de petits diamètres sont introduites dans l'espace entier $\mathbf{R}^3$. Ceci nous amène, également, à étudier l'évolution de l'énergie électromagnétique correspondante selon cette déformation du milieu de propagation.

On suppose que dans $\mathbf{R}^3$ on a m inhomogénéités $\{z_j + \alpha B_j\}_{j=1}^m$, où α est un petit paramètre, $B_j \subset \mathbf{R}^3$ est un ouvert borné de diamètre borné indépendamment de j et les points $\{z_j\}_{j=1}^m$ vérifient l'hypothèse (1). On suppose que la perméabilité magnétique μ_α et la permittivité électrique ε_α vérifient (2). Nous commençons notre analyse dans la section 2 en obtenant rigoureusement des développements asymptotiques des champs électrique et magnétique, avec des estimations d'erreurs uniformes dans $\mathbf{R}^3$. Ces formules asymptotiques sont construites par la méthode des déve-

E-mail addresses: christian.daveau@math.u-cergy.fr (C. Daveau), abdessatar.khelifi@fsb.rnu.tn (A. Khelifi).

loppements asymptotiques raccordés. Concernant cette méthode, le lecteur peut consulter [7,10]. En domaine borné, on peut voir aussi les travaux [1,3,5]. Le terme d'ordre principal dans des développements asymptotiques analogues (mais pour le cas d'un domaine borné) a été obtenue par Vogelius et Volkov [14] et Ammari et al. [4]. Nos formules asymptotiques utilisent des tenseurs de polarisation associés à des inhomogénéités électromagnétiques qui semblent être des généralisations naturelles des tenseurs qui ont été présentés par Schiffer et Szegö [13] et complètement étudiés par beaucoup d'autres auteurs [2,6,8,11].

1. Problem formulation

We suppose that there is a finite number of electromagnetic inclusions in $\mathbf{R}^3$, each of the form $z_j + \alpha B_j$, where $B_j \subset \mathbf{R}^3$ is a bounded and C^∞ -domain containing the origin. The total collection of inhomogeneities is:

$$B_\alpha = \bigcup_{j=1}^m \{z_j + \alpha B_j\}.$$

The points $z_j \in \mathbf{R}^3$, $j = 1, \dots, m$, which determine the location of the inhomogeneities, are assumed to satisfy the following inequality:

$$|z_j - z_l| \geq c_0 > 0, \quad \forall j \neq l. \quad (1)$$

Let μ_0 and ε_0 denote the permeability and the permittivity of the free space, $\omega > 0$ is a given frequency and $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} > 0$ is the wave number. We denote by $x = (x_1, x_2, x_3)$ the Cartesian coordinates in $\mathbf{R}^3$. We shall assume that $\mu_0 > 0$ and $\varepsilon_0 > 0$ are positive constants. Let $\mu_j > 0$ and $\varepsilon_j > 0$ denote the permeability and the real permittivity of the j -th inhomogeneity, $z_j + \alpha B_j$; these are also assumed to be positive constants. Introduce the piecewise-constant magnetic permeability

$$\mu_\alpha(x) := \begin{cases} \mu_0, & x \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{B}_\alpha, \\ \mu_j, & x \in z_j + \alpha B_j, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (2)$$

The piecewise-constant electric permittivity $\varepsilon_\alpha(x)$ is defined analogously. If we allow the degenerate case $\alpha = 0$, then the function $\mu_0(x)$ (resp. $\varepsilon_0(x)$) takes the constant value of μ_0 (resp. ε_0). We now suppose that the collection of inclusions B_α is contained in an open subset Ω of $\mathbf{R}^3$ and that the source current density $\mathbf{J}_s$ is supported in $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

Let $(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{H}_\alpha) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ denote the time-harmonic electromagnetic fields, with pulsation ω , in the presence of the electromagnetic inclusions B_α . These time-harmonic fields are solutions of the Maxwell's equations, see [9,12]:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_\alpha = i\omega\mu_\alpha \mathbf{H}_\alpha, & \text{in } \mathbf{R}^3, \\ \nabla \times \mathbf{H}_\alpha = -i\omega\varepsilon_\alpha \mathbf{E}_\alpha + \mathbf{J}_s, & \text{in } \mathbf{R}^3, \\ \nu \times \mathbf{E}_\alpha \quad \text{and} \quad \nu \times \mathbf{H}_\alpha & \text{are continuous across } \partial(z_j + \alpha B_j), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left[\nabla \times \mathbf{E}_\alpha - ik \frac{x}{|x|} \times \mathbf{E}_\alpha \right] = 0 & \text{and} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left[\nabla \times \mathbf{H}_\alpha - ik \frac{x}{|x|} \times \mathbf{H}_\alpha \right] = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Here ν stands for the outgoing unit normal to $\partial(z_j + \alpha B_j)$. We eliminate the magnetic field from the above equations by dividing the first equation in (3) by μ_α and taking the curl. We obtain a problem for $\mathbf{E}_\alpha$:

$$\begin{cases} \nabla \times \mu_\alpha^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_\alpha - \omega^2 \varepsilon_\alpha \mathbf{E}_\alpha = i\omega \mathbf{J}_s, & \text{in } \mathbf{R}^3, \\ \nu \times \mathbf{E}_\alpha & \text{is continuous across } \partial(z_j + \alpha B_j), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left[\nabla \times \mathbf{E}_\alpha - ik \frac{x}{|x|} \times \mathbf{E}_\alpha \right] = 0. \end{cases} \quad (4)$$

We obtain the magnetic field $\mathbf{H}_\alpha$ from $\mathbf{E}_\alpha$ through the formula, $\mathbf{H}_\alpha = \frac{1}{i\omega\mu_\alpha} \nabla \times \mathbf{E}_\alpha$. The electromagnetic energy is defined by:

$$\mathcal{E}_\alpha := \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (\varepsilon_\alpha |\mathbf{E}_\alpha(x)|^2 + (\mu_\alpha)^{-1} |\mathbf{H}_\alpha(x)|^2) dx. \quad (5)$$

The finiteness of the electromagnetic energy $\mathcal{E}_\alpha$ requires that both electric and magnetic field belong to a space of fields with square integrable curls:

$$H(\text{curl}; \mathbf{R}^3) := \{\mathbf{a} \in L^2(\mathbf{R}^3)^3; \text{curl } \mathbf{a} \in L^2(\mathbf{R}^3)^3\}.$$

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/4672399>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/4672399>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)