

Calculus of Variations

Asymptotic analysis of periodically-perforated nonlinear media
at and close to the critical exponentAndrea Braides^a, Laura Sigalotti^b^a *Dipartimento di Matematica, Università di Roma 'Tor Vergata', via della ricerca scientifica, 00133 Roma, Italy*^b *Dipartimento di Matematica, Università di Roma 'La Sapienza', piazzale A.Moro, 00185 Roma, Italy*

Received 19 June 2007; accepted after revision 7 January 2008

Available online 12 February 2008

Presented by Haïm Brezis

Abstract

We give a general Γ -convergence result for vector-valued nonlinear energies defined on perforated domains for integrands with p -growth in the critical case $p = n$. We characterize the limit extra term by a formula of homogenization type. We also prove that for p close to n there are three regimes, two with a nontrivial size of the perforation (exponential and mixed polynomial-exponential), and one where the Γ -limit is always trivial. **To cite this article:** A. Braides, L. Sigalotti, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).

© 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Résumé

Analyse asymptotique dans l'étude de milieux perforés au voisinage d'un exposant critique. On établit un résultat général de Γ -convergence d'énergies vectorielles nonlinéaires définies sur des domaines perforés, dans le cas où l'intégrande est de croissance p , dans le cas critique $p = n$; la limite est caractérisée par une formule de type homogénéisation. On démontre également que pour p voisin de n trois régimes sont possibles, deux avec une taille du perforation non triviale (exponentielle et polynomiale-exponentielle), et une taille pour laquelle la Γ -limite est toujours triviale. **Pour citer cet article :** A. Braides, L. Sigalotti, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).

© 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

On analyse le comportement asymptotique de fonctionnelles non linéaires F_δ avec intégrandes du croissance $p > 1$, définies sur des fonctions vectorielles satisfaisant des conditions aux limites de type Dirichlet dans des milieux périodiquement perforés (voir (4)). Ces milieux sont caractérisés par leur périodicité δ et par la taille des perforations $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ (voir (3)). Dans la terminologie de [5] notre résultat peut être traduit par l'équivalence, dans le cas $p = n$, des fonctionnelles F_δ et à des fonctionnelles :

E-mail addresses: braides@mat.uniroma2.it (A. Braides), sigalott@mat.uniroma1.it (L. Sigalotti).

$$G_\delta(u) = \int_{\Omega} f(Du) \, dx + \frac{|\log \varepsilon|^{n-1}}{\delta^n} \int_{\Omega} \varphi(u) \, dx, \quad u \in W_0^{1,n}(\Omega; \mathbb{R}^m). \quad (1)$$

Notre méthode démontre que le régime exponentiel des perforations dérive de l'invariance par changement d'échelles de problèmes que caractérise la fonction φ (voir (9)) et de comportement logarithmique de leurs minimiseurs. La formule «capacitaire» pour φ , dans le cas $p < n$, doit être remplacée par une formule intéressante de type «homogénéisation», qui montre que l'énergie des perforations ne se concentre pas à la même échelle que celle des perforations elles-mêmes, de manière analogue aux fonctionnelles du type Ginzburg–Landau. Nous avons étendu notre analyse aux exposants p variables, et on a montré que le régime exponentiel s'étend jusqu'à $p - n = O(\delta^{n/n-1})$, avec deux autres régimes possibles. Dans le cas $f(\xi) = |\xi|^p$ ce résultat peut être traduit par l'équivalence des fonctionnelles F_δ^p (voir (11)) et

$$G_\delta^p(u) = \int_{\Omega} |Du|^p \, dx + C_p \frac{\varepsilon^{n-p}}{\delta^n} \left(\frac{1 - \varepsilon^{n-p/p-1}}{n-p} \right)^{1-p} \int_{\Omega} |u|^p \, dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \quad (2)$$

(C_p calculable explicitement), valable pour tout p , et donnant des perforations polynomiales pour $p < n$.

1. Introduction

An interesting and much studied class of problems are variational problems defined on varying domains. The prototype of these domains are *perforated domains*; i.e., those obtained from a fixed Ω by removing some periodic set, the simplest of which is a periodic array of closed sets:

$$\Omega_\delta = \Omega \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^n} (\delta i + \varepsilon K), \quad (3)$$

with $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$. On the set K , we suppose that it is a bounded closed set with nonempty interior. When we consider Dirichlet boundary conditions on the boundary of Ω_δ (or on the boundary of Ω_δ interior to Ω) the asymptotic behaviour of such problems is obtained by studying the Γ -convergence (see [4]) of the functionals:

$$F_\delta(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} f(Du) \, dx & \text{if } u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \text{ and } u = 0 \text{ on } \Omega \setminus \Omega_\delta, \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4)$$

where f is an energy density growing as $|Du|^p$. Taking $f(Du) = |Du|^p$ above, we encounter some by-now 'classical' results, first observed by Marchenko and Khruslov [7], and subsequently recast in a variational setting by Cioranescu and Murat [6], in which case for a *nontrivial scaling* of the perforation the Γ -limit contains an additional 'strange term' in place of the internal boundary conditions. To obtain this form of the Γ -limit different choices of ε must be made according to the space dimension n , that in this case are:

$$(\text{polynomial scaling}) \quad \varepsilon = R\delta^{n/n-p} \quad \text{if } p < n \text{ (with } R > 0), \quad (5)$$

$$(\text{exponential scaling}) \quad \varepsilon = \exp(-a/\delta^{n/n-1}) \quad \text{if } p = n \text{ (with } a > 0). \quad (6)$$

A complete analysis by Γ -convergence for energies with a general (quasiconvex) integrand f with p -growth, and depending on vector-valued functions has been performed by Ansini and Braides in the case leading to the polynomial scaling ($p < n$) [2]. In this paper we treat the case $p = n$, which is the one leading to the exponential scaling, by first giving general convergence result for this critical case, and then exploring the case when p is varying and close to n .

2. Asymptotic behaviour at the critical scaling

In the case $p = n$ we have the following general convergence result:

Theorem 2.1 (*Asymptotic behaviour at the critical exponent*). *Let $f : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow [0, \infty)$ be a quasiconvex function with $f(0) = 0$; we suppose that there exist $c_1, c_2, k > 0$ such that*

$$c_1 |A|^n \leq f(A) \leq c_2 |A|^n, \quad |f(A) - f(B)| \leq k |A - B| |A|^{n-1} + |B|^{n-1}$$

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/4672415>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/4672415>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)