

Probabilités/Statistique

Une loi limite pour les marches aléatoires
avec des applications physiques

Raoul Charreton

104, quai Louis-Blériot, 75016 Paris, France

Reçu le 16 mai 2007 ; accepté le 28 octobre 2007

Disponible sur Internet le 26 novembre 2007

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Nous considérons une marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$, partant de l'origine. Nous construisons une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$ en évaluant, pour chaque $N \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, le carré du nombre de trajectoires possibles se terminant au niveau k en N transitions ou moins. Nous normalisons ensuite ce nombre carré par sa somme, relativement à k , pour obtenir une loi de probabilité, dépendant de N . Notre résultat principal montre que cette loi de probabilité est asymptotiquement normale lorsque $N \rightarrow \infty$. Cette construction est inspirée par le modèle de base associé à l'interprétation de la mécanique quantique. *Pour citer cet article : R. Charreton, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A limit law for random walks with physical applications. We consider a standard random walk on $\mathbb{Z}$, starting from the origin. We build a law of probability on $\mathbb{Z}$, based upon the evaluation, for each $N \geq 0$ and $k \in \mathbb{Z}$, of the squared number of possible trajectories, reaching level k after N or less transitions. We normalize this squared number by its sum, with respect to k , to obtain a probability law, depending upon N . Our main result establishes that this probability law converges to a normal distribution as $N \rightarrow \infty$. Our construction is inspired and motivated by the basic model used for the interpretation of quantum mechanics. *To cite this article: R. Charreton, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Notation and definitions

We consider a *standard* random walk (refer to Ch. 1–3 in Feller [2], and Ch. 1 of Révész [4]). On a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ we define i.i.d. random variables $X = X_1, X_2, \dots$ with symmetrical Bernoulli law, fulfilling $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. The corresponding random walk $\mathcal{S}$ is given by $S_0 = 0$ and $S_n = X_1 + \dots + X_n$ for $n \geq 1$. For each $N \in \mathbb{N}$, let $\Sigma_N = \{S_n : 0 \leq n \leq N\}$ denote the trajectory of $\mathcal{S}$ in the time-interval $[0, N]$. Σ_N takes its

Adresse e-mail : raoul.charreton@mines-paris.org.

values in a probability space $\{\Omega_N, \mathcal{A}_N, \mathbb{P}_N\}$, with Ω_N collecting all possible trajectories of S in $[0, N]$, $\mathcal{A}_N = \mathcal{P}(\Omega_N)$ being composed of all subsets of Ω_N , and $\omega \in \Omega_N$ having probability $\mathbb{P}_N(\omega) = 2^{-N}$.

Trajectories reaching level k before time N

For each $N \in \mathbb{N}$ and $k \in \mathbb{Z}$, let $\nu(N, k)$ be the number of trajectories of S , such that $S_j = k$ for some $0 \leq j \leq N$. The value of $\nu(N, k)$ is given explicitly in (2)–(5). We distinguish, in (6): Case P , where $N - |k|$ is even; and: Case I , where $N - |k|$ is odd. In (8), for each $N \in \mathbb{N}$, we define $\tau_P(N)$ (resp. $\tau_I(N)$), as the sum of the $\nu(N, k)^2$, w.r. to $k \in \mathbb{Z}$, and with $N - |k|$ even (resp. $N - |k|$ odd). In (10)–(12), we define, for each $N \in \mathbb{N}$, two probability distributions, by setting, for each $k \in \mathbb{Z}$, $p_P^*(N, k) = \nu(N, k)^2 / \tau_P(N)$ when $N - |k|$ is even, and $p_I^*(N, k) = \nu(N, k)^2 / \tau_I(N)$, when $N - |k|$ is odd. It is convenient to denote by $Z_{N,P}$ (resp. by $Z_{N,I}$) a random variable with probability law $p_P^*(N, \cdot)$ (resp. $p_I^*(N, \cdot)$). These two laws are combined in (14)–(15), by setting, for each $k \in \mathbb{Z}$, $p(N, k) = \nu(N, k)^2 / \tau(N)$, with $\tau(N) = \tau_P(N) + \tau_I(N)$. Likewise, we denote by Z_N a random variable with probability law $p(N, \cdot)$.

Main results

Our main results are stated in two theorems, with $N(0, 1)$ denoting the standard Gaussian law. By ‘ $\xrightarrow{d}$ ’ is meant convergence in distribution:

Theorem 1. For either $j = P$, or $j = I$, we have, as $N \rightarrow \infty$, $\frac{Z_{N,j}}{\sqrt{N/2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

Theorem 2. We have, as $N \rightarrow \infty$, $\frac{Z_N}{\sqrt{N/2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

Theorems 1 and 2 have consequences in the field of the interpretation of quantum mechanics, which will be developed elsewhere.

1. Introduction

1.1. Notations et définitions

Nous rappelons, tout d’abord, le contexte classique des *marches aléatoires*, qui constitue un préambule nécessaire à l’énoncé de nos résultats principaux, au §1.3. Nous renvoyons, par exemple, aux Ch. 1–3 de Feller [2], pour un exposé des bases classiques de cette théorie, ainsi qu’au Ch. 1 de Révész [4], pour un ensemble de références et de résultats sur le sujet. Soit, sur l’espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, une suite $X = X_1, X_2, \dots$ de variables aléatoires [v.a.] indépendantes de même loi de Bernoulli symétrique, telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Nous considérons la marche aléatoire définie par $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ pour $n \geq 1$. Pour chaque entier $N \geq 0$, nous notons $\Sigma_N := \{S_n : 0 \leq n \leq N\}$, la trajectoire de cette marche aléatoire dans l’intervalle de temps $[0, N]$. La trajectoire Σ_N prend ses valeurs dans l’espace de probabilités $\{\Omega_N, \mathcal{A}_N, \mathbb{P}_N\}$ constitué comme suit. L’espace Ω_N des événements élémentaires est fini, et composé de la collection des trajectoires possibles de la marche aléatoire dans l’intervalle de temps $[0, N]$. $\mathcal{A}_N = \mathcal{P}(\Omega_N)$ est l’ensemble des parties de Ω_N . La probabilité de l’un quelconque, ω , des éléments de Ω_N , est $\mathbb{P}_N(\omega) = 2^{-N}$.

1.2. Premières énumérations du nombre de trajectoires

Les divers calculs énumératifs associés aux trajectoires de marches aléatoires ont fait l’objet d’études approfondies dans la littérature scientifique. Nous nous référons, en particulier, aux Ch. 2, 3 et 6 de Feller [2], à ce sujet. Pour tout $N \geq 0$, la loi de probabilité de $\frac{1}{2}(S_N + N)$ est binomiale symétrique, ce qui est noté $\frac{1}{2}(S_N + N) \stackrel{d}{=} B(N, \frac{1}{2})$. Cette loi est explicitement définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_N = 2m - N) &= 2^{-N} \binom{N}{m} = 2^{-N} \left\{ \frac{N!}{m!(N-m)!} \right\} \quad \text{pour } m = 0, \dots, N, \\ \mathbb{P}(S_N = 2m - N) &= 0 \quad \text{pour } m \notin \{0, \dots, N\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/4672470>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/4672470>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)