

Partial Differential Equations

Calderón–Zygmund estimates for measure data problems

Giuseppe Mingione

Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Viale G.P. Usberti 53/a, Campus, 43100 Parma, Italy

Received 17 November 2006; accepted 25 January 2007

Available online 13 March 2007

Presented by Alain Bensoussan

Abstract

New existence and regularity results are given for non-linear elliptic problems with measure data. The gradient of the solution is itself in an optimal (fractional) Sobolev space: this can be considered an extension of Calderón–Zygmund theory to measure data problems. *To cite this article: G. Mingione, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Résumé

Estimations de type Calderon–Zygmund pour des problèmes avec données mesures. On établit de nouveaux résultats d'existence et régularité pour des problèmes elliptiques non-linéaires avec données mesures. Le gradient de la solution appartient lui-même à un espace de Sobolev (fractionnaire) optimal, ce que l'on peut considérer comme une extension de la théorie de Calderón–Zygmund aux problèmes avec données mesures. *Pour citer cet article : G. Mingione, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Considérons le problème de Dirichlet (1) sous les hypothèses (2), (3), où μ est une mesure de Radon de variation totale finie. Un théorème classique de Boccardo et Gallouët [4,5] assure l'existence d'une solution, au sens des distributions, u de (1), dont le gradient Du vérifie les propriétés de régularité (5). Nous nous proposons ici de montrer qu'une telle propriété, unique résultat de régularité connu pour les solutions, est en fait une conséquence d'un résultat de régularité plus profond pour Du . Nous montrons en effet que Du appartient à un espace de Sobolev (fractionnaire) optimal : plus précisément, (9) a lieu. Nous obtenons alors en corollaire, le résultat d'intégrabilité (5), via le théorème d'injection de Sobolev dans le cas fractionnaire. Nous obtenons également de substantielles améliorations des résultats, à la fois d'intégrabilité et de différentiabilité, dans le cas où la mesure μ vérifie la condition de diffusion (15). Nous démontrons en effet, sous cette hypothèse, de nouvelles estimées optimales, de Marcinkiewicz pour le gradient, donnant ainsi une version non-linéaire d'un théorème de D. Adams [1]. La condition (15) permet également d'améliorer le taux de différentiabilité de Du ; nous prouvons en outre une estimée de décroissance de type Morrey pour

E-mail address: giuseppe.mingione@unipr.it.

la dérivée fractionnaire. Les démonstrations utilisent des arguments de localisation, reposant sur un certain type de décomposition dyadique du domaine, combinés avec des arguments de comparaison locale.

1. Introduction and function spaces

Let us consider the following Dirichlet problem:

$$-\operatorname{div} a(x, Du) = \mu \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (1)$$

Here we assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain, μ is a signed Radon measure with finite total variation $|\mu|(\Omega) < \infty$, and $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a Carathéodory vector field satisfying the following standard monotonicity and Lipschitz assumptions:

$$\begin{cases} v(s^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2)^{(p-2)/2} |z_2 - z_1|^2 \leq \langle a(x, z_2) - a(x, z_1), z_2 - z_1 \rangle, \\ |a(x, z_2) - a(x, z_1)| \leq L(s^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2)^{(p-2)/2} |z_2 - z_1|, \quad |a(x, 0)| \leq Ls^{p-1}, \end{cases} \quad (2)$$

for every $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$. When referring to the structural properties of a , and in particular to (2), we shall always assume $p \geq 2$, $n \geq 2$, $0 < v \leq L$, $s \geq 0$. The measure μ will be considered as defined on the whole $\mathbb{R}^n$ by simply letting $|\mu|(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) = 0$. Sometimes, we shall also use the following assumption:

$$|a(x, z) - a(x_0, z)| \leq L|x - x_0|(s^2 + |z|^2)^{(p-1)/2}, \quad \text{for all } x, x_0 \in \Omega, \text{ and } z \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Assumptions (2) are modeled on the basic example $-\operatorname{div}[c(x)(s^2 + |Du|^2)^{\frac{p-2}{2}} Du] = \mu$, where $v \leq c(x) \leq L$. An important instance is the p -Laplacian operator with measure data: $-\Delta_p u = -\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = \mu$. For the problem (1) we shall adopt the following distributional-like notion of solution, compare with [4]:

Definition 1.1. A solution u to the problem (1) under assumptions (2), is a function $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ such that $a(x, Du) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ and

$$\int_{\Omega} a(x, Du) D\varphi \, dx = \int_{\Omega} \varphi \, d\mu \quad \text{for every } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (4)$$

The study of problem (1) began with the fundamental work of Littman, Stampacchia and Weinberger [12,15], who treated linear equations with measurable coefficients. When referring to Definition 1.1, the existence theory for the general quasilinear Leray–Lions type operators in (1) has been established in the by now classical papers of Boccardo and Gallouët [4,5], who proved the existence of a solution u to (1) such that

$$Du \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad \text{for every } q < b := n(p-1)/(n-1) \text{ when } p \leq n. \quad (5)$$

The solution found in [4] is obtained via approximation with ‘regular data’, that is, solving auxiliary problems $-\operatorname{div} a(x, Du_n) = f_n$, $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, where f_n is a suitable mollification of μ ; then a combination of a priori and convergence estimates yields the existence. These are the so-called Solutions Obtained as Limits of Approximations (SOLA), and are the solutions we are going to deal with here. Distributional solutions as (4) are not unique, and uniqueness is indeed the main open problem in the theory: identifying a suitable functional class where a unique solution can be defined and found. Despite several attempts such a problem remains mostly unsolved but when $p = n$ [9,10], or in the case where μ is an L^1 -function [3,6,8] when so-called entropy and renormalized solutions come into the play.

Inclusion (5) is optimal in the scale of Lebesgue spaces, as $Du \notin L^b$ in general. The counterexample is given by the Green’s function for the p -Laplacian operator, that is the (unique) solution to $\Delta_p u = \delta_0$, which is proportional to $|x|^{(p-n)/(n-1)}$; here δ_0 denotes the Dirac measure charging the origin. Anyway (5) can be sharpened using Marcinkiewicz spaces [3], see below, since

$$Du \in \mathcal{M}^b(\Omega, \mathbb{R}^n). \quad (6)$$

When $p > n$ instead, μ belongs to the dual of $W^{1,p}$, and the existence of a unique solution in the natural space $W_0^{1,p}(\Omega)$ follows by standard methods of the theory of monotone operators.

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/4672612>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/4672612>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)