Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Indagationes Mathematicae 27 (2016) 590–600
indagationes mathematicae
www.elsevier.com/locate/indag

# Fonctions multiplicatives, sommes d'exponentielles, et loi des grands nombres

Gérald Tenenbaum

*Institut Élie Cartan, Université de Lorraine, BP 70239, 54506 Vandœuvre Cedex, France*

**Abstract**

We provide essentially optimal, effective conditions to ensure that, when available, the Halberstam–Richert upper bound for the mean value of a non-negative multiplicative function actually furnishes the true order of magnitude. This is applied, in particular, to short sums of multiplicative functions over arithmetic progressions, to exponential sums with multiplicative coefficients, and to strong law of large numbers with multiplicative weights.


*Keywords:* Mean values of non-negative multiplicative functions; Short sums of multiplicative functions; Arithmetical progressions; Exponential sums; Strong law of large numbers; Multiplicative weights; Multiplicative coefficients

## 1. Introduction et énoncé des résultats

Une version faible d'un théorème de Halberstam et Richert [13] fournit l'ordre de grandeur générique de la fonction sommatoire d'une fonction arithmétique multiplicative positive ou nulle dont les valeurs sur les nombres premiers sont bornées en moyenne. Le résultat suivant est ainsi établi dans [14] (th. 01) ou [20] (th. III.3.5). Ici et dans la suite, nous réservons la lettre $p$ pour désigner un nombre premier. Nous utilisons également les notations suivantes, relatives à une fonction multiplicative positive ou nulle $f$ et à un nombre réel $x \geqslant 1$:

$$M_f(x) := \sum_{n \leqslant x} f(n), \qquad L_f(x) := \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}, \qquad E_f(x) := \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{f(p)}{p}\right).$$

*E-mail address:* gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.indag.2015.11.007

**Théorème A.** *Soit $f$ une fonction arithmétique multiplicative positive ou nulle satisfaisant, pour des constantes convenables $A$ et $B$, aux conditions*

$$\text{(i)}\quad \sum_{p\leqslant y} f(p)\log p \leqslant Ay \quad (y\geqslant 2);$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{p}\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{f(p^\nu)\log p^\nu}{p^\nu}\leqslant B.$$

*Nous avons alors, pour $x>1$,*

$$M_f(x)\leqslant (A+B+1)\frac{x}{\log x}L_f(x). \tag{1.1}$$

Dans nombre de circonstances, il est utile de disposer de l'information que cette majoration fournit en fait l'ordre de grandeur exact de la fonction sommatoire. Il en va ainsi, par exemple, de l'étude de la répartition dans les progressions arithmétiques et/ou dans les petits intervalles. En effet, sous l'hypothèse supplémentaire[1]

$$\begin{cases} f(p^\nu)\leqslant A^\nu \quad (p\geqslant 2,\ \nu\geqslant 1),\\ (\forall\varepsilon>0)\quad f(n)\ll_\varepsilon n^\varepsilon \quad (n\geqslant 1), \end{cases} \tag{S}$$

il résulte d'une majoration de Shiu [19] et d'une estimation de Bachman [2] (lemme 1) que, pour chaque $\varepsilon\in\ ]0,\frac12[$ fixé, on a

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ n\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)}} f(n)\ll \frac{y}{\varphi(q)\log x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,q)=1}}\frac{f(n)}{n} \tag{1.2}$$

uniformément pour $x\geqslant 2$, $x^\varepsilon\leqslant y\leqslant x$, $q\leqslant y^{1-\varepsilon}$, $(a,q)=1$.[2] Ici et dans la suite, nous notons $\varphi$ la fonction indicatrice d'Euler.

Lorsqu'il est acquis que les deux membres de (1.1) sont du même ordre de grandeur pour la fonction $f\mathbf{1}_{\{n:(n,q)=1\}}$, la majoration (1.2) prend la forme canonique

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ n\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)}} f(n)\ll \frac{y}{x\varphi(q)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,q)=1}} f(n). \tag{1.3}$$

Nous renvoyons aux travaux de Bachman [1,2], pour une étude directe de cette question naturelle.

Notre premier résultat fournit une condition suffisante essentiellement optimale pour qu'il en soit ainsi. Nous définissons $Q(y):=y\log y-y+1$ $(y>0)$, introduisons six paramètres $A>0$, $B>0$, $\sigma$, $\tau$, $0<\sigma<\tau<\min\{1-\sigma,1/(1+A)\}$, $\eta>0$, $\lambda>0$, et posons $h:=(1-\tau)/(\tau A)>1$. Pour $x>1$, nous désignons alors par $\mathcal{M}(x)=\mathcal{M}(x;A,B,\sigma,\tau,\eta,\lambda)$ la classe des fonctions multiplicatives $f$ à valeurs réelles positives ou nulles vérifiant les conditions

[1] Qui implique (i) et (ii), avec éventuellement d'autres valeurs des constantes.

[2] Voir [18] et [15] pour des extensions de ce résultat.