Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 2016;xxx(xx):xxx–xxx

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
en colaboración con
CIMNE

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

www.elsevier.es/rimni

Análisis de pilares con deformación por cortante mediante elementos finitos y acciones repartidas equivalentes

J.L. Romero [a,*], E.M. López [b], M.A. Ortega [c] y O. Río [b]

[a] *Dpto de Matemáticas e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil, ETSICCP, 28040 Madrid, España*
[b] *Dpto Construcción IETcc, CSIC, C/Serrano Galvache 4, 28033 Madrid, España*
[c] *Empresarios Agrupados, Dpto. Civil, C/Magallanes 3, 28015 Madrid, España*

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Historia del artículo:
Recibido el 19 de noviembre de 2015
Aceptado el 28 de junio de 2016
On-line el xxx

Palabras clave:
Método de elementos finitos
Solución nodal exacta
Acción repartida equivalente
Viga-columna de Timoshenko
Viga-columna de Bernoulli-Euler
Carga de pandeo

RESUMEN

En este trabajo se aplica un procedimiento basado en el concepto de Acción Repartida Equivalente (ARE) al análisis, por el Método de Elementos Finitos (MEF) formulado en desplazamientos y solución nodal exacta, de pilares con deformación por cortante de acuerdo con la teoría de Timoshenko. Los resultados obtenidos con la metodología ARE-MEF, en los casos analizados, ponen de manifiesto que con un número muy reducido de elementos (uno y dos en los ejemplos desarrollados) se alcanza gran exactitud en desplazamientos, giros y esfuerzos. Sin embargo con otras metodologías formuladas en desplazamientos, como por ejemplo la de integración reducida, se requiere del orden de 40 elementos para alcanzar resultados similares. Asimismo en el presente trabajo, a partir del MEF con solución nodal exacta se determinan de una forma directa y sistemática las funciones de estabilidad y la carga de pandeo para el pilar de Timoshenko.

Analysis of columns with shear deformation using finite element method and equivalent distributed loads

Keywords:
Finite element method
Exact nodal solution
Equivalent distributed load
Timoshenko beam-column
Bernoulli-Euler beam-column
Buckling load

ABSTRACT

This paper describes a procedure based on the concept of Equivalent Distributed Loads (EDL) applied to the Finite Elements Method (FEM) based on displacements and exact nodal solution of columns subject to shear deformation in accordance with the Timoshenko beam theory. The results obtained using this "EDL-FEM" methodology, in the cases studied, show that a high level of exactness in displacements, rotations as well as shear force and bending moment is obtained with a very small number of elements (one or two in the examples developed). Other methodologies based on displacements, such as reduced integration, require on the order of 40 elements to achieve similar results. The stability functions and buckling load for the Timoshenko beam are also determined in a direct and systematic way from the FEM with exact nodal solution.

1. Introducción

En la metodología de los elementos finitos formulados en desplazamientos, algunos autores emplean como funciones de forma soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo relativo al problema, que se quiere resolver, debido a la propiedad de conseguirse soluciones nodalmente exactas, tal y como demostró P. Tong [1] de forma general. Siguiendo la idea de este autor en Romero et. al [2] se expone una metodología aplicable a problemas de elementos finitos que incluye los casos de operadores no autoadjuntos para la ecuación diferencial. Resultando la propiedad de exactitud nodal con la condición de emplear como funciones de ponderación en el método de Petrov-Galerkin, soluciones de la ecuación diferencial homogénea del operador adjunto de la ecuación. Esto sucede independientemente de cuál sea la función empleada para aproximar los desplazamientos. Posteriormente

* Autor para correspondencia.
Correos electrónicos: jlromero@fi.upm.es, joseluis.romero@upm.es (J.L. Romero).

http://dx.doi.org/10.1016/j.rimni.2016.06.002
0213-1315/

Cómo citar este artículo: J.L. Romero, et al. Análisis de pilares con deformación por cortante mediante elementos finitos y acciones repartidas equivalentes, Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 2016. http://dx.doi.org/10.1016/j.rimni.2016.06.002

otro autores [3,4] realizan también estudios en conexión con esta idea de la exactitud nodal.

En el campo de las estructuras, otros autores han realizado diversas aplicaciones de dicho tipo de aproximación a diferentes modelos de vigas. Entre las distintas referencias puede destacarse la de Reddy [5] donde dicho autor realiza aplicaciones al modelo de viga de Timoshenko y justifica que los elementos están libres del fenómeno de bloqueo al emplear funciones de forma que son soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales. También otros autores [6,7] recientemente han empleado elementos finitos con solución nodal exacta en la misma línea de la referencia anterior.

En Romero et. al [8] se emplea por primera vez la metodología de elementos finitos con solución nodal exacta y el concepto de acción repartida equivalente (ARE) aplicado al modelo de viga de Bernoulli-Euler. En dicho trabajo se destaca la ventaja del procedimiento al permitir mejorar la aproximación de la solución en el interior de los elementos. Posteriormente en [9–11] se aplican ambas ideas al modelo de viga de Timoshenko. En [12,13] se aplica ya el concepto de ARE al análisis del pandeo de pilares en el modelo de Bernoulli-Euler.

El objetivo del presente trabajo es aplicar por primera vez la metodología ARE-MEF en el estudio del pilar de Timoshenko. El planteamiento seguido ha sido el siguiente. Tras ésta introducción se realiza el desarrollo de la teoría de los elementos finitos con solución nodal exacta para el pilar de Timoshenko. Con dicho desarrollo se puede considerar el pilar de Bernoulli-Euler como un caso particular del de Timoshenko. Este planteamiento permite también obtener de una manera directa y sistemática la carga de pandeo y las funciones de estabilidad para los dos tipos de pilares. En relación con estas funciones se indica que la deducción de las mismas fue ya realizada por Absi en 1967 [14], siguiendo una línea diferente a la que aquí se expone. En el trabajo se continúa después exponiendo el concepto de ARE para el problema considerado, destacando las propiedades de interpolación y ortogonalidad, que son la base del buen comportamiento del método expuesto, para la aproximación de los esfuerzos y también para los desplazamientos y giros, en el interior de cada elemento finito. Además en el trabajo se han realizado dos ejemplos numéricos, que ponen de manifiesto las excelentes ventajas de la metodología empleada, al poder aproximar los desplazamientos, giros y esfuerzos de manera óptima con un número muy reducido de elementos, uno y dos, en los casos desarrollados.

Finalmente se quiere indicar que estas metodologías de elementos finitos aplicadas al modelo Timoshenko siguen muy vigentes, de ahí el interés de los autores por dicho modelo para el estudio de los pilares con deformación por cortante. No obstante en la literatura se van introduciendo también otras formas de análisis basadas en teorías no locales de la elasticidad y modelos de alto orden [15–19]. En relación con estos últimos, se indica que aunque aproximan mejor la distribución de tensiones en las secciones presentan mayor complejidad computacional y sus aplicaciones están dirigidas, por ahora, esencialmente hacia problemas de tipo académico.

2. Elementos finitos con solución nodal exacta para el pilar de timoshenko

El sistema de ecuaciones diferenciales que rige el modelo de Timoshenko para el pilar es $L(U)=F$ [20], donde

$$L(U)=\begin{bmatrix} -(kAG(w'-\psi))_{\prime}+(Pw')_{\prime} \\ -(EI\psi')_{\prime}-kAG(w'-\psi) \end{bmatrix}$$
$$U=\begin{bmatrix} w & \psi \end{bmatrix}^T, F=\begin{bmatrix} f & 0 \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

siendo w el desplazamiento, ψ el giro, P el axil y k, A y G, el factor de corrección para el esfuerzo cortante, el área de la sección y el módulo de rigidez de cortante, respectivamente. Llamando H a la rigidez EI y K al producto kAG, el sistema puede expresarse en la forma:

$$\begin{aligned} &-(K(w'-\psi))_{\prime}+(Pw')_{\prime}=f \\ &-(H\psi')_{\prime}-K(w'-\psi)=0 \end{aligned} \tag{2}$$

y también como:

$$\begin{cases} \left[(1-P/K)(H\psi')_{\prime}\right]'+(P\psi)_{\prime}=f \\ \qquad w'=\psi-(H\psi')_{\prime}/K \end{cases} \tag{3}$$

La formulación variacional de manera análoga a la expuesta en [8,11,20] se obtiene, realizando la ponderación usual en el sistema original, con $V=\begin{bmatrix} v & \theta \end{bmatrix}^T$ y tras el correspondiente proceso de integración por partes en el subintervalo genérico $\left[\alpha,\beta\right]$, resulta:

$$b(U,V)=l(V)+\sum_{i=1}^{4} l_i(V)\hat{l}_i(U) \tag{4}$$

donde las formas, bilineales y lineales, son respectivamente:

$$\begin{aligned} b(U,V)&=a(U,V)-\int_{\alpha}^{\beta} Pw'v'dx, \\ a(U,V)&=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{H\psi'\theta'+K(w'-\psi)(v'-\theta)\right\}dx \end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} &l(V)=\int_{\alpha}^{\beta} vfdx, \\ &l_1(V)=v(\alpha), \qquad l_2(V)=\theta(\alpha) \\ &l_3(V)=v(\beta), \qquad l_4(V)=\theta(\beta) \end{aligned} \tag{5b}$$

$$\begin{aligned} &\hat{l}_1(U)=\left[-K(w'-\psi)\right]_{x=\alpha}+Pw'(\alpha) \\ &\hat{l}_2(U)=\left[-H\psi'\right]_{x=\alpha} \\ &\hat{l}_3(U)=\left[K(w'-\psi)\right]_{x=\beta}-Pw'(\beta) \\ &\bar{l}_4(U)=\left[H\psi'\right]_{x=\beta} \end{aligned} \tag{5c}$$

El problema variacional para el caso, por ejemplo, de una pieza empotrada en el extremo $x=a$ y libre en $x=b$, sometida a un axil P constante y con cargas F_H y M en el extremo libre consiste en obtener:

$$(w,\psi)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$$

tal que

$$\begin{aligned} &\int_a^b\left\{H\psi'\theta'+K(w'-\psi)(v'-\theta)-Pw'v'\right\}dx=\int_a^b fvdx+F_Hv(\mathrm{b})+M\theta(\mathrm{b}) \\ &\forall(v,\theta)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \end{aligned} \tag{6}$$

donde $H_0^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev de las funciones g tales que $g, g'\in L^2(\Omega)$ junto con $g(a)=0$. La solución única de este problema, como es conocido, es la que hace estacionario el siguiente funcional de energía:

$$\begin{aligned} I(w,\psi)=&\int_a^b\left\{\frac{H}{2}\psi^2+\frac{K}{2}(w'-\psi)^2-\frac{P}{2}w'^2\right\}dx \\ &-\left(\int_a^b fwdx+F_Hw(b)+M\psi(b)\right) \end{aligned} \tag{7}$$