C. R. Mecanique 343 (2015) 187–191

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Mecanique

www.sciencedirect.com

A numerical method to solve the Stokes problem with a punctual force in source term

Une méthode numérique pour la résolution du problème de Stokes avec une force ponctuelle en terme source

Loïc Lacouture

Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS UMR 8628, Faculté des sciences d'Orsay, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 19 June 2014
Accepted 17 September 2014
Available online 12 November 2014

Keywords:
Error estimates
Finite element method
Stokeslet
Thin structures

Mots-clés :
Estimations d'erreur
Méthode éléments finis
Stokeslet
Structures fines

A B S T R A C T

The aim of this note is to present a numerical method to solve the Stokes problem in a bounded domain with a Dirac source term, which preserves optimality for any approximation order by the finite-element method. It is based on the knowledge of a fundamental solution to the associated operator over the whole space. This method is motivated by the modeling of the movement of active thin structures in a viscous fluid.

R É S U M É

Le but de cette note est de présenter une méthode numérique pour la résolution du problème de Stokes avec une force ponctuelle en terme source, qui assure l'optimalité de l'erreur d'approximation éléments finis. Elle s'appuie sur la connaissance explicite d'une solution fondamentale de l'opérateur linéaire associé. Cette méthode est motivée par la modélisation du mouvement de structures fines actives dans un fluide visqueux.

Version française abrégée

L'étude du mouvement de structures fines actives dans un fluide visqueux, tels que les flagelles permettant la nage de bactéries ou les cils impliqués dans le transport mucociliaire, conduit à considérer le problème de Stokes avec un second membre singulier. Dans l'asymptotique d'un cil dont le diamètre tend vers 0 et la vitesse vers l'infini, le terme source est en fait une distribution linéique de forces. Dans le but de pouvoir faire des calculs, puisque intégrer numériquement le long d'une courbe quelconque est difficile, nous approchons la distribution linéique de forces δ_Γ par une somme de forces ponctuelles $\sum c_i\delta_i$. Une preuve basée sur celle du théorème des sommes de Riemann permet de montrer qu'il y a convergence, au sens faible dans $H^{-3/2-s}$, pour tout $s>0$, de $\sum c_i\delta_i$ vers δ_Γ lorsque le nombre N de masses de Dirac tend vers l'infini. On peut aussi préciser la convergence dans des espaces plus faibles, voir (1). La convergence des solutions

E-mail address: loic.lacouture@math.u-psud.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crme.2014.09.008
1631-0721/

associées se déduit de l'inégalité (2), tirée de [1]. On est alors ramené à l'étude du problème de Stokes avec une force ponctuelle en terme source.

Lorsqu'on considère un problème elliptique avec une masse de Dirac en second membre, en dimension $d \geqslant 2$, ce second membre n'étant pas dans H^{-1}, le problème sort du cadre variationnel standard basé sur l'espace de Sobolev H^1. Si la méthode des éléments finis peut être définie au niveau discret, les résultats de convergence classiques ne sont *a priori* plus valables. Dans le cas du problème de Poisson, qui peut être vu comme une version scalaire et simplifiée du problème de Stokes, Scott a démontré dans [2] que la méthode éléments finis P_1 converge en norme $\mathbb{L}^2$ à l'ordre 1 en 2d et 1/2 en 3d. Des estimations similaires ont été obtenues dans [3] avec une méthode de Galerkin discrète. De plus, Apel et ses co-auteurs ont montré dans [4] qu'en raffinant le maillage autour de la singularité, on retrouvait l'ordre de convergence classique. La méthode présentée, basée sur la connaissance explicite d'une solution fondamentale de l'opérateur linéaire associé, fait partie d'une classe de méthodes dites de *soustraction*, introduites en électroencéphalographie [5]. Elle permet de retrouver les ordres de convergence classiques sans raffinement de maillage.

Pour fixer les idées, nous allons nous intéresser au problème de Stokes avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes, voir le problème (4). La particularité de ce problème réside dans la singularité du second membre : un Dirac de force appliqué en un point x_0 du domaine Ω. Pour cet opérateur, on connaît une solution fondamentale définie en domaine infini, appelée *Stokeslet*, que l'on note $(\mathbf{u}_\delta, p_\delta)$, voir (5). On obtient la solution $(\mathbf{u}, p)$ du problème (4) en ajoutant à $(\mathbf{u}_\delta, p_\delta)$ un relèvement régulier prenant ainsi en compte les conditions aux bords. La singularité de la solution $(\mathbf{u}, p)$ est contenue dans la solution fondamentale $(\mathbf{u}_\delta, p_\delta)$, et elle est localisée au point x_0. Le principe de la méthode qui suit consiste à capturer cette singularité pour se ramener à la résolution d'un problème auxiliaire régulier.

On commence par définir une fonction plateau χ, régulière, valant 1 sur un voisinage de x_0 et 0 loin de ce point, voir Définition 3.1. On note ensuite $\mathbf{u}_0 = \chi \mathbf{u}_\delta$ et $p_0 = \chi p_\delta$, et $\mathbf{g}$ et h les fonctions définies en (6). D'après ces définitions, on remarque que les supports de $\mathbf{g}$ et h sont contenus dans une couronne centrée en x_0, voir Fig. 1. De plus, les fonctions $\mathbf{u}_\delta$ et p_δ étant analytiques en dehors de x_0, la régularité des fonctions $\mathbf{g}$ et h dépend directement de celle de la fonction χ. Finalement, pour obtenir la solution $(\mathbf{u}, p)$ de (4), il suffit de corriger les termes d'erreur $\mathbf{g}$ et h introduits en (6) en résolvant le problème elliptique régulier (7), dont on note $\mathbf{v}$ la solution. En effet, la fonction $\mathbf{u} := \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ est la solution du problème (4).

Cette méthode permet de passer de la résolution d'un problème singulier à celle d'un problème auxiliaire régulier. Alors que le premier converge à un ordre faible [2], le second converge à l'ordre optimal, quel que soit l'ordre des éléments utilisés. En notant $\mathbf{u}_h := \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_h$, où $\mathbf{v}_h$ est la solution numérique du problème (7) obtenue par une méthode éléments finis, on déduit de (8) que l'erreur commise sur $\mathbf{u}$ est la même que celle commise sur $\mathbf{v}$, et on montre ainsi que la vitesse de convergence est optimale.

Par exemple, si on utilise une méthode éléments finis P_1, $k = 0$ suffit. On définit alors χ comme en (9), et on explicite $\mathbf{g}$ et h, valant respectivement (10) et (11) en dimension 2, et (12) et (13) en dimension 3. Après résolution numérique du problème (7), on obtient finalement une solution approchée $\mathbf{u}_h$ dont l'erreur $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbb{L}^2}$ est en $O(h^2)$, quelle que soit la dimension, contre une erreur, avec une méthode directe, en $O(h)$ en dimension 2 et en $O(\sqrt{h})$ en dimension 3.

Cette méthode, présentée dans le cas du problème de Stokes, peut se généraliser à d'autres problèmes elliptiques linéaires, comme le problème de Poisson avec une masse de Dirac en second membre. Les conditions aux limites de type Dirichlet homogènes peuvent aussi être remplacées par des conditions de type Dirichlet non homogènes, Neumann ou Robin. Enfin, la linéarité, qui joue un rôle essentiel, permet en outre de résoudre le cas où le second membre est la somme d'un nombre fini de forces ponctuelles et d'une fonction lisse, tout en ne résolvant qu'un seul problème numérique.

1. Introduction

In order to model active thin structures in a viscous fluid, such as flagella connected to bacteria or cilia involved in the mucociliary transport, we have studied the Stokes problem with a singular right-hand side. In the asymptotic of a zero diameter cilia with an infinite velocity, the source term is a lineic distribution of forces, which, in order to ease computations, will be approximated by a sum of punctual forces. After having justified this approximation, we will present a numerical method to solve the Stokes problem with a punctual force in source term, and illustrate the results by numerical simulations.

2. Approximation of the lineic distribution of forces by a sum of punctual forces

Since calculating an integral on any curve is numerically very difficult, the source term, noted δ_Γ, the lineic distribution of forces on a curve Γ, is approached by a sum of N punctual forces $\sum c_i \delta_i$ uniformly distributed along Γ. The theorem of Riemann sums ensures that $\sum c_i \delta_i$ weakly converges to δ_Γ in $H^{-3/2-s}$, for all $s > 0$. Working in weaker spaces, it is possible to adapt the proof of the theorem of Riemann sums and specify the convergence:

$$\left\| \delta_\Gamma - \sum_{i=1}^{N} c_i \delta_i \right\|_{H^{-2-s}} \leqslant \frac{C}{\sqrt{N}} \quad \text{and} \quad \left\| \delta_\Gamma - \sum_{i=1}^{N} c_i \delta_i \right\|_{H^{-5/2-s}} \leqslant \frac{C}{N} \tag{1}$$

Moreover, using a result proved by Lions and Magenes in [1], which can be written in this case