Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

ELSEVIER

C. R. Mecanique 336 (2008) 422–427

COMPTES RENDUS MECANIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

On the control of crack growth in elastic media

Patrick Hild [a], Arnaud Münch [a,*], Yves Ousset [b]

[a] *Laboratoire de mathématiques, université de Franche-Comté, UMR CNRS 6623, 25030 Besançon, France*
[b] *ONERA, DMSE, 29, avenue de la division Leclerc, BP 72, 92322 Châtillon cedex, France*

Received 9 July 2007; accepted after revision 7 February 2008

Available online 6 March 2008

Presented by Jean-Baptiste Leblond

Abstract

In the framework of linear fracture theory, the Griffith criterion postulates the growth of any crack if the corresponding so-called energy release rate, defined as the variation of the mechanical energy, reaches a critical value. We consider in this Note the optimal location problem which consists in minimizing this rate by applying to the structure an additional boundary load having a support which is disjoint from the support of the initial load possibly responsible of the growth. We give a sufficient well-posedness condition, introduce a relaxed problem in the general case, and then present a numerical experiment which suggests that the original nonlinear problem is actually well-posed. ***To cite this article: P. Hild et al., C. R. Mecanique 336 (2008).***

Résumé

Sur le contrôle de la propagation de fissure en milieu élastique. Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, le critère de Griffith postule la croissance d'une fissure si le taux de restitution de l'énergie associé excède une valeur critique. On considère dans cette Note le problème d'optimisation de position qui consiste à minimiser ce taux en appliquant à la structure un chargement de frontière additionnel de support disjoint du chargement initial. On donne une condition suffisante d'existence de solution, on introduit une relaxation du problème dans le cas général, puis on présente une simulation numérique suggérant que ce problème non linéaire est en fait bien posé. ***Pour citer cet article : P. Hild et al., C. R. Mecanique 336 (2008).***

Keywords: Solids and structures; Linear fracture mechanics; Control

Mots-clés : Solides et structures ; Mécanique linéaire de la rupture ; Contrôle

Version française abrégée

Soit une structure élastique occupant au repos le domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ (muni du repère orthornormé $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$), encastrée sur $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ et soumise à un chargement $\boldsymbol{G} \in (L^2(\partial\Omega \backslash \Gamma_0))^2$ défini par

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{f}\mathcal{X}_{\Gamma_f} + \boldsymbol{h}\mathcal{X}_{\Gamma_h}, \quad \boldsymbol{f} \in \left(L^2(\Gamma_f)\right)^2,\ \boldsymbol{h} \in \left(L^2(\Gamma_h)\right)^2,\ \Gamma_f, \Gamma_h \subset \partial\Omega\backslash\Gamma_0,\ \Gamma_f \cap \Gamma_h = \emptyset, \tag{1}$$

* Corresponding author.
E-mail addresses: patrick.hild@univ-fcomte.fr (P. Hild), arnaud.munch@univ-fcomte.fr (A. Münch), yves.ousset@onera.fr (Y. Ousset).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2008.02.005

où $\mathcal{X}_{\Gamma_f} \in L^\infty(\Gamma_f, \{0,1\})$ désigne la fonction caractéristique de Γ_f. On suppose que Ω contient une fissure γ d'extrémité $\boldsymbol{F}$, non chargée (i.e., $\Gamma_f \cap \gamma = \emptyset$, $\Gamma_h \cap \gamma = \emptyset$) et libre (i.e., $\Gamma_0 \cap \gamma = \emptyset$). Le déplacement correspondant noté $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^2$ où $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ minimise à l'équilibre l'énergie élastique (2) et vérifie le système aux limites (3). On suppose pour simplifier que la force $\boldsymbol{G}$ est telle que les lèvres de la fissure ne s'interpénètrent pas.

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture [9], le critère de Griffith [6] postule la croissance de la fissure – précisément du point $\boldsymbol{F}$ – lorsque le taux de restitution associé, noté $G_{\boldsymbol{\psi}}$ défini par (6) (fonction de la géométrie, du matériau et du chargement) atteint une valeur critique. Afin de réduire ce taux et ainsi la propagation du défaut, une première approche consiste à optimiser les caractéristiques du matériau, mentionnant dans ce sens, l'essor des matériaux composites. Une seconde approche, abordée dans cette note, suivant les développements plus récents en contrôle actif (voir [8]), consiste à modifier le chargement $\boldsymbol{G}$. Supposant fixes le chargement principal $\boldsymbol{f}$ et son support Γ_f ainsi que $\boldsymbol{h}$, on introduit le problème $(\mathcal{P}_{\Gamma_h})$ défini en (4) qui consiste à minimiser le taux $G_{\boldsymbol{\psi}}$ par rapport au support Γ_h de $\boldsymbol{h}$ considérée ainsi comme une contre-force de $\boldsymbol{f}$. Ce point de vue ne semble avoir été abordé que dans deux notes [2,3] par P. Destuynder dans le contexte simplifié de l'opérateur de Laplace (voir [4] pour des aspects numériques). La référence [2] considère l'équation des ondes et propose une loi de commande sur les facteurs d'intensité de contraintes. Signalons plus récemment [12] qui se propose d'annuler les singularités en fond de fissure par l'ajout de chargements (singuliers !) sur la frontière.

Le problème non linéaire $(\mathcal{P}_{\Gamma_h})$ est potentiellement un problème mal posé dans la mesure où l'infimum peut ne pas être atteint dans la classe des fonctions caractéristiques. Dans un tel cas, le support optimal Γ_h est composé d'un nombre arbitrairement grand de composantes disjointes. L'existence d'au moins un minimum est garanti si le nombre de composantes disjointes de Γ_h est supposé fini (voir Théorème 2.1) : la démonstration repose sur la distance de Hausdorff [1]. Dans le cas général, l'introduction d'une relaxation, c'est-à-dire d'un problème bien posé et dont le minimum égale l'infimum de $(\mathcal{P}_{\Gamma_h})$ est nécessaire : cette relaxation, notée $(\mathcal{RP}_{\Gamma_h})$, s'obtient ici simplement en remplaçant la classe des fonctions caractéristiques $\mathcal{X}_L$ par son enveloppe convexe pour la topologie faible L^∞-$\star$, c'est à dire l'espace des densités $S_L = \{s \in L^\infty(\Gamma, [0,1]), \|s\|_{L^1(\Gamma)} = L|\Gamma|\}$ (voir Théorème 2.2). Ce résultat, attendu dans la mesure où la variable de position Γ_h apparaît seulement dans le terme d'ordre zéro de l'équation d'état elliptique (par opposition aux problèmes plus difficiles où la relaxation implique l'opérateur différentiel principal – ici l'opérateur de divergence) se démontre par exemple en utilisant l'approche variationnelle non convexe et la mesure de Young (on renvoit à [11] pour la preuve dans un cas similaire), ou plus simplement ici en adaptant la preuve du Théorème 2.1. La résolution numérique du problème $(\mathcal{RP}_{\Gamma_h})$ à l'aide d'une méthode de gradient (reposant sur le Théorème 3.1) suggère en fait que la densité optimale est une fonction caractéristique, et que de fait, le problème initial $(\mathcal{P}_{\Gamma_h})$ coïncide avec $(\mathcal{RP}_{\Gamma_h})$ et est bien posé. On renvoit à [7] pour d'autres applications confirmant cette propriété.

1. Problem statement

Let S be an elastic structure occupying a bounded domain Ω of $\mathbb{R}^2$ (referred to the orthonormal frame $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$), fixed on a part $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ and submitted to a normal load $\boldsymbol{G} \in (L^2(\partial\Omega\backslash\Gamma_0))^2$ defined in (1) where $\mathcal{X}_{\Gamma_f} \in L^\infty(\Gamma_f, \{0,1\})$ denotes the characteristic function of Γ_f. The domain Ω is assumed to contain a crack γ of extremity $\boldsymbol{F}$, unloaded i.e. $\Gamma_f \cap \gamma = \emptyset$, $\Gamma_h \cap \gamma = \emptyset$ and free i.e. $\Gamma_0 \cap \gamma = \emptyset$. The corresponding displacement field $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^2$ where $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ on } \Gamma_0\}$ minimizes at equilibrium the energy

$$J(\boldsymbol{u}, \gamma) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{Tr}\big(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \cdot \nabla\boldsymbol{u}\big)\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_f} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

(Tr designates the trace operator) and satisfies the following linear partial differential system:

$$\begin{cases} -\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T)/2, \\ \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \subset \partial\Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}\mathcal{X}_{\Gamma_f} + \boldsymbol{h}\mathcal{X}_{\Gamma_h} \quad \text{on } \partial\Omega\backslash\Gamma_0 \end{cases} \tag{3}$$

where $\mathbb{A}$ designates the 2-D elasticity tensor and $\boldsymbol{\nu}$ is the outward normal vector on $\partial\Omega$. We assume here for simplicity that the load $\boldsymbol{G}$ is such that there is not interpenetration of the crack lips.

In the framework of the linear fracture mechanics [9], the well-known Griffith's criterion [6] postulates the static-growth of the crack γ if the corresponding so-called energy release rate $G_{\boldsymbol{\psi}}$ reaches a critical value. In order to prevent