Journal of Number Theory 188 (2018) 88–95

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Number Theory

www.elsevier.com/locate/jnt

Note sur les lois locales conjointes de la fonction nombre de facteurs premiers

Gérald Tenenbaum

Institut Élie Cartan, Université de Lorraine, BP 70239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 12 octobre 2017
Reçu en forme révisée le 15 janvier 2018
Accepté le 21 janvier 2018
Disponible sur Internet le 21 février 2018
Communiqué par S.J. Miller

MSC :
11N25
11N32
11N37
11N60

Mots-clés :
Number of prime factors
Shifted integers
Polynomial values
Additive functions

RÉSUMÉ

Let $\alpha \in \,]0, 1]$ and let Q_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ denote distinct irreducible polynomials with integer coefficients. We show that, for vectors with coordinates not exceeding a constant multiple of their mean, the joint local distribution of the number of prime factors of the $Q_j(n)$ for $x < n \leqslant x + x^\alpha$ is majorized by a constant multiple of the pairwise independency model, and we provide an upper bound for the constant in terms of the coefficients of the Q_j.

Notons $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers distincts d'un entier naturel n. Soit $\pi_{k,\ell}(x)$ le nombre des entiers n n'excédant pas x et tels que $\omega(n) = k$, $\omega(n+1) = \ell$. Un cas particulier d'un récent résultat de É. Goudout [2] stipule que la majoration

Adresse e-mail : gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr.

https://doi.org/10.1016/j.jnt.2018.01.005
0022-314X/

$$\pi_{k,\ell}(x) \ll \frac{x(\log_2 x)^{k+\ell-2}}{(\log x)^2(k-1)!(\ell-1)!} \qquad (x \geqslant 3) \tag{1}$$

est valable uniformément, pour toute constante $R > 0$, dans le domaine

$$1 \leqslant k, \ell \leqslant R \log_2 x.$$

Goudout établit en fait un théorème plus général, relatif à un produit de deux polynômes linéaires et fournit une borne uniforme dans les coefficients. Il mentionne également que sa démonstration s'adapte au cas d'un produit quelconque de polynômes linéaires.

Nous proposons ici une preuve simple d'une généralisation de (1), basée sur la méthode d'Erdős dans [1].

Nous considérons une famille $\{Q_j\}_{1 \leqslant j \leqslant r}$ de polynômes irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$, deux à deux premiers entre eux et sans diviseur fixe et posons $Q := \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} Q_j$. Nous désignons par $\varrho_j(m)$, resp. $\varrho_0(m)$, $(m \geqslant 1)$ le nombre de racines de Q_j, resp. de Q, dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, notons D_j le discriminant de Q_j, D celui de Q, et posons

$$\begin{aligned} g_j &:= \deg Q_j \quad (1 \leqslant j \leqslant r), \quad g := \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} g_j = \deg Q, \\ Q(X) &= \sum_{0 \leqslant i \leqslant g} \beta_i X^i, \quad \beta := \beta_g, \quad \|Q\| := \max_{1 \leqslant i \leqslant g} |\beta_i|, \\ \varphi_j(n) &:= n \prod_{p \mid n} \Big(1 - \frac{\varrho_j(p)}{p}\Big) \quad (n \geqslant 1,\, 0 \leqslant j \leqslant r). \end{aligned}$$

Ici et dans la suite nous réservons la lettre p pour désigner un nombre premier.

En vertu du théorème des idéaux premiers, il existe des constantes positives M_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ telles que

$$\Big| \sum_{p \leqslant x} \frac{\varrho_j(p)}{p} - \log_2 x \Big| \leqslant M_j \qquad (x \geqslant 2).$$

Notre résultat principal dépend fondamentalement de ces quantités.

Posons $M := \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} M_j$.

Théorème 1. *Soient $R > 0$, $r \geqslant 1$, $\alpha \in]0,1[$. Nous avons uniformément pour $x \geqslant c_0\|Q\|$, $x^\alpha \leqslant y \leqslant x$, $k_j \in [1, R\log_2 x]$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$,*

$$\sum_{\substack{x < n \leqslant x+y \\ \omega(Q_j(n)) = k_j \ (1 \leqslant j \leqslant r)}} 1 \ll \Big(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\Big)^K \frac{\mathrm{e}^M y}{(\log x)^r} \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \frac{(\log_2 x + M_j)^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!}, \tag{2}$$

où K, c_0 et la constante implicite dépendent au plus de α, R, r, g.