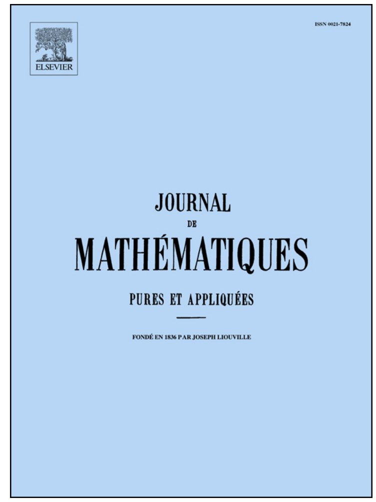
Accepted Manuscript



A Dirichlet problem for the Laplace operator in a domain with a small hole close to the boundary

Virginie Bonnaillie-Noël, Matteo Dalla Riva, Marc Dambrine, Paolo Musolino

PII: S0021-7824(18)30011-4
DOI: https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.01.004
Reference: MATPUR 2979

To appear in: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*

Received date: 15 December 2016

A Dirichlet problem for the Laplace operator in a domain with a small hole close to the boundary

Virginie Bonnaillie-Noël[a], Matteo Dalla Riva[b,c], Marc Dambrine[d,*], Paolo Musolino[c]

[a]*Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, CNRS, PSL Research University, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France*
[b]*Department of Mathematics, The University of Tulsa, 800 South Tucker Drive, Tulsa, Oklahoma 74104, USA*
[c]*Department of Mathematics, Aberystwyth University, Ceredigion SY23 3BZ, Wales, UK*
[d]*CNRS / Univ Pau & Pays Adour, Laboratoire de mathématiques et de leur applications de Pau - Fédération IPRA, UMR 5142, Pau, France*

Abstract

We study the Dirichlet problem in a domain with a small hole close to the boundary. To do so, for each pair $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ of positive parameters, we consider a perforated domain $\Omega_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ obtained by making a small hole of size $\varepsilon_1\varepsilon_2$ in an open regular subset Ω of $\mathbb{R}^n$ at distance ε_1 from the boundary $\partial\Omega$. As $\varepsilon_1 \to 0$, the perforation shrinks to a point and, at the same time, approaches the boundary. When $\boldsymbol{\varepsilon} \to (0,0)$, the size of the hole shrinks at a faster rate than its approach to the boundary. We denote by $u_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ the solution of a Dirichlet problem for the Laplace equation in $\Omega_{\boldsymbol{\varepsilon}}$. For a space dimension $n \geq 3$, we show that the function mapping $\boldsymbol{\varepsilon}$ to $u_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ has a real analytic continuation in a neighborhood of $(0,0)$. By contrast, for $n = 2$ we consider two different regimes: $\boldsymbol{\varepsilon}$ tends to $(0,0)$, and ε_1 tends to 0 with ε_2 fixed. When $\boldsymbol{\varepsilon} \to (0,0)$, the solution $u_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ has a logarithmic behavior; when only $\varepsilon_1 \to 0$ and ε_2 is fixed, the asymptotic behavior of the solution can be described in terms of real analytic functions of ε_1. We also show that for $n = 2$, the energy integral and the total flux on the exterior boundary have different limiting values in the two regimes. We prove these results by using functional analysis methods in conjunction with certain special layer potentials.

Résumé

Nous étudions le problème de Dirichlet dans un domaine avec une petite inclusion proche du bord. Pour cela, pour chaque paire $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de paramètres positifs, nous considérons un domaine perforé $\Omega_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ obtenu en faisant une petite inclusion de taille $\varepsilon_1\varepsilon_2$ dans un ouvert régulier Ω de $\mathbb{R}^n$ à distance ε_1 du bord $\partial\Omega$. Quand $\varepsilon_1 \to 0$, l'inclusion se rétracte en un point et, en même temps, se rapproche du bord. Quand $\boldsymbol{\varepsilon} \to (0,0)$, l'inclusion se rétracte plus vite qu'elle n'approche du bord. Notons $u_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace sur $\Omega_{\boldsymbol{\varepsilon}}$. En dimension $n \geq 3$, nous montrons que la fonction qui à $\boldsymbol{\varepsilon}$ associe $u_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ a un prolongement analytique réel dans un voisinage de $(0,0)$. *A contrario*, lorsque $n = 2$ nous considérons deux rgimes : $\boldsymbol{\varepsilon}$ tend vers $(0,0)$, et ε_1 tend vers 0 avec ε_2 fixé. Quand $\boldsymbol{\varepsilon} \to (0,0)$, la solution $u_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ a un comportement logarithmique ; Quand seul $\varepsilon_1 \to 0$ et ε_2 est fixé, le comportement asymptotique de la solution peut se décrire à l'aide de fonctions réelles analytiques en ε_1. Nous montrons aussi que pour $n = 2$, l'énergie intégrale et le flux total sur le bord extérieur ont des valeurs limites différentes selon les deux régimes. Nous prouvons ces résultats en utilisant des méthodes d'analyse fonctionnelle ainsi que des potentiels de couche adaptés.

Keywords: Dirichlet problem; singularly perturbed perforated domain; Laplace operator; real