

Accepted Manuscript

The porous medium equation with large initial data on negatively curved Riemannian manifolds

Gabriele Grillo, Matteo Muratori, Fabio Punzo

PII: S0021-7824(17)30115-0

DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2017.07.021>

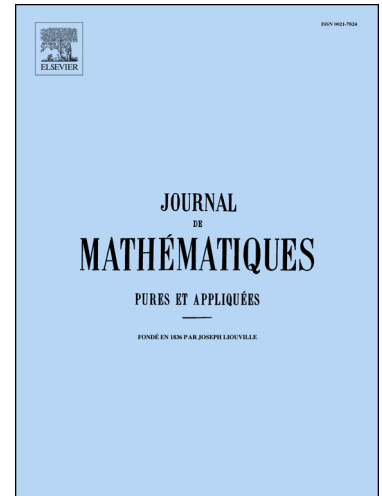
Reference: MATPUR 2924

To appear in: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*

Received date: 2 October 2016

Please cite this article in press as: G. Grillo et al., The porous medium equation with large initial data on negatively curved Riemannian manifolds, *J. Math. Pures Appl.* (2017), <http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2017.07.021>

This is a PDF file of an unedited manuscript that has been accepted for publication. As a service to our customers we are providing this early version of the manuscript. The manuscript will undergo copyediting, typesetting, and review of the resulting proof before it is published in its final form. Please note that during the production process errors may be discovered which could affect the content, and all legal disclaimers that apply to the journal pertain.



THE POROUS MEDIUM EQUATION WITH LARGE INITIAL DATA ON NEGATIVELY CURVED RIEMANNIAN MANIFOLDS

GABRIELE GRILLO, MATTEO MURATORI*, AND FABIO PUNZO

Abstract. We show existence and uniqueness of very weak solutions of the Cauchy problem for the porous medium equation on Cartan-Hadamard manifolds satisfying suitable lower bounds on Ricci curvature, with initial data that can grow at infinity at a prescribed rate, that depends crucially on the curvature bounds. In particular, the pressure at infinity can grow at most linearly on the hyperbolic space, and quadratically both on the Euclidean space and on a class of spaces whose Ricci curvature vanishes sufficiently fast at infinity.

The curvature conditions we require are sharp for uniqueness in the sense that if they are not satisfied then, in general, there can be infinitely many solutions of the Cauchy problem even for bounded data. Furthermore, under matching upper bounds on sectional curvatures, we give a precise estimate for the maximal existence time, and we show that in general solutions do not exist if the initial data grow at infinity too fast. This proves in particular that the growth rate of the data we consider is optimal for existence. Pointwise blow-up is also shown for a particular class of manifolds and of initial data.

Résumé. On montre l'existence et l'unicité de solutions très faibles du problème de Cauchy pour l'équation des milieux poreux sur variétés de Cartan-Hadamard qui satisfont des bornes inférieures sur la courbure de Ricci, avec données initiales qui peuvent croître à l'infini à un taux contrôlé, qui dépend de manière cruciale des bornes de courbure. En particulier, la pression à l'infini peut croître au plus linéairement sur l'espace hyperbolique, et quadratiquement sur l'espace Euclidien ainsi que dans une classe d'espaces dont la courbure de Ricci tend vers zéro de manière suffisamment rapide à l'infini.

Les conditions de courbure qu'on impose sont optimales en ce qui concerne l'unicité dans la mesure où, si elles ne sont pas satisfaites, en général il peut y avoir une infinité de solutions du problème de Cauchy, même avec des données initiales bornées. En plus, en imposant des bornes supérieures sur les courbures sectionnelles qui correspondent à celles inférieures, on fournit une estimation précise du temps maximal d'existence, et on démontre qu'en général les solutions n'existent pas si la donnée initiale croît trop vite à l'infini. Cela prouve, en particulier, que le taux de croissance de la donnée initiale qu'on considère est optimal pour l'existence. Finalement, on montre un résultat d'explosion ponctuelle pour une classe particulière de variétés et de données initiales.

CONTENTS

1. Introduction	2
2. Preliminaries, assumptions and statements of the main results	4
2.1. Notations from Riemannian geometry	5
2.2. Laplacian comparison	5
2.3. Main assumptions and consequences	6
2.4. Functional setting	7
2.5. Existence and uniqueness results	7
2.6. Examples: the quasi-Euclidean case, hyperbolic space	9
2.7. Maximal existence time, nonexistence and blow-up results	9
3. Existence: proofs	11
3.1. Outline of the strategy	11
3.2. Construction of the supersolution	12

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 35R01. Secondary: 35K65, 58J35, 35A01, 35A02, 35B44.

Key words and phrases. Porous medium equation; Cartan-Hadamard manifolds; large data; a priori estimates; blow-up.

*Corresponding author.

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/8902407>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/8902407>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)