Doctopic: Partial differential equations ARTICLE IN PRESS CRASS1:5999

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ••• (••••) •••–•••

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations

On distributional solutions of local and nonlocal problems of porous medium type

Sur des solutions distributionnelles de problèmes locaux et non locaux de type milieux poreux

Félix del Teso, Jørgen Endal, Espen R. Jakobsen

NTNU Norwegian University of Science and Technology, NO-7491 Trondheim, Norway

ARTICLE INFO

Article history:
Received 16 June 2017
Accepted after revision 17 October 2017
Available online xxxx

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

We present a theory of well-posedness and a priori estimates for bounded distributional (or very weak) solutions of

$$\partial_t u - \mathfrak{L}^{\sigma,\mu}[\varphi(u)] = g(x,t) \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{0.1}$$

where φ is merely continuous and nondecreasing, and $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu}$ is the generator of a general symmetric Lévy process. This means that $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu}$ can have both local and nonlocal parts like, e.g., $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu} = \Delta - (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$. New uniqueness results for bounded distributional solutions to this problem and the corresponding elliptic equation are presented and proven. A key role is played by a new Liouville type result for $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu}$. Existence and a priori estimates are deduced from a numerical approximation, and energy-type estimates are also obtained.

RÉSUMÉ

Nous montrons l'unicité, l'existence, et des estimations a priori pour des solutions distributionnelles bornées de (0.1), où φ est continue et croissante et $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu}$ est le générateur d'un processus de Lévy symétrique général. Cela veut dire que $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu}$ peut avoir des parties locales et non locales, comme par exemple $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu} = \Delta - (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$. Nous présentons et montrons des nouveaux résultats d'unicité pour des solutions distributionnelles bornées de ce problème. Un nouveau résultat de type Liouville pour $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu}$ joue un rôle clé. L'existence et des estimations a priori sont déduites d'une approximation numérique ; des inégalités de type énergie sont aussi obtenues.

E-mail addresses: felix.delteso@ntnu.no (F. del Teso), jorgen.endal@ntnu.no (J. Endal), espen.jakobsen@ntnu.no (E.R. Jakobsen).

https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.10.010
1631-073X/

Please cite this article in press as: F. del Teso et al., On distributional solutions of local and nonlocal problems of porous medium type, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2017), https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.10.010

Version française abrégée

Nous étudions le problème de Cauchy pour l'équation de diffusion non linéaire de type Lévy (1.1). Ici u est la solution, u_0 la donnée initiale, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue croissante quelconque, g le terme du membre de droite de l'équation, et $T > 0$. L'opérateur de diffusion $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu}$ est défini par (1.3), (1.4) et (1.5), et pourrait être le générateur d'un processus de Lévy quelconque, comme le laplacien ou le laplacian fractionaire.

Dans cette note, nous donnons des résultats d'existence, d'unicité, et des estimations a priori pour les solutions distributionelles de (1.1)–(1.2) dans $L^1 \cap L^\infty$, ainsi que pour son équation elliptique associée (1.6). Les preuves sont liée à l'article [1] et à des extentions récentes de [5].

Les résultats d'unicité de la première partie de cette note jouent un rôle clé dans les preuves de convergence des méthodes numériques de [3]. Dans la deuxième partie, nous annonçons quelques résultats de [3]. Nous obtenons l'existence des solutions distributionelles via une approximation numérique de (1.1)–(1.2), ainsi qu'un principe de contraction dans L^1, un principe de comparaison, la décroissance des normes L^1 et L^∞, et la continuité en temps pour la norme L^1. Ensuite, d'après les résultats de [4], nous héritons d'une famillie d'inegalitées d'énergie, ce qui implique, en particulier, la décroissance des normes L^p pour chaque $1 < p < \infty$.

1. Introduction

We study the Cauchy problem for the nonlinear Lévy-type diffusion equation

$$\partial_t u - \mathfrak{L}^{\sigma,\mu}[\varphi(u)] = g(x,t) \qquad \text{in} \quad Q_T := \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{on} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

where $u = u(x,t)$ is the solution, u_0 the initial data, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an arbitrary continuous nondecreasing function, g the right-hand side, and $T > 0$. For smooth functions ψ, the diffusion operator $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu}$ is defined as

$$\mathfrak{L}^{\sigma,\mu}[\psi] := L^\sigma[\psi] + \mathcal{L}^\mu[\psi], \tag{1.3}$$

where the local and nonlocal parts are given by

$$L^\sigma[\psi](x) := \operatorname{tr}\big(\sigma\sigma^{\mathrm{T}} D^2\psi(x)\big) = \sum_{i=1}^{P} \partial_{\sigma_i}^2 \psi(x) \qquad \text{where} \qquad \partial_{\sigma_i} := \sigma_i \cdot D, \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}^\mu[\psi](x) := \int_{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \big(\psi(x+z) - \psi(x) - z \cdot D\psi(x)\mathbf{1}_{|z|\le 1}\big)\,\mathrm{d}\mu(z), \tag{1.5}$$

and $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_P) \in \mathbb{R}^{N\times P}$, $P \in \mathbb{N}$ and $\sigma_i \in \mathbb{R}^N$, and μ are nonnegative symmetric Radon measures. This class of diffusion operators coincides with the class of operators of symmetric Lévy processes. Examples are the classical Laplacian Δ, the fractional Laplacians $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ with $\alpha \in (0,2)$, the relativistic Schrödinger-type operators $m^\alpha I - (m^2 I - \Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ with $\alpha \in (0,2)$ and $m > 0$, the strongly degenerate operators, and, surprisingly, the numerical discretizations of $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu}$. Due to the general assumptions on φ, (generalized) porous medium, fast diffusion, and Stefan-type problems are included in (1.1)–(1.2).

In this note, we present new existence and uniqueness results and a priori estimates for distributional solutions of (1.1)–(1.2) in $L^1 \cap L^\infty$. In particular, we present and prove new uniqueness results for bounded distributional solutions of both (1.1)–(1.2) and the related elliptic equation

$$w - \mathfrak{L}^{\sigma,\mu}[\varphi(w)] = f(x) \qquad \text{on} \quad \mathbb{R}^N. \tag{1.6}$$

The proofs are inspired by the seminal work [1] and the later extension to the nonlocal setting in [5]. Most of the other properties generalize well-known results both for the local case $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu} = \Delta$ (cf. [6]) and for the nonlocal case $\mathfrak{L}^{\sigma,\mu} = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ with $\alpha \in (0,2)$ (cf. [2]).

These uniqueness results will play a crucial role in the convergence proofs for numerical methods in [3]. In this note, we also announce some of the results of [3]. From a novel numerical approximation of (1.1)–(1.2), we obtain existence of distributional solutions, L^1 contraction, comparison principle, decay of the L^1 and L^∞ norms, and continuity in time of the L^1 norm. Moreover, by adapting the results of [4], we also inherit a family of energy estimates that, in particular, allow us to show decay of any L^p norm for $1 < p < \infty$.

2. Main results

We use the following assumptions:

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ is nondecreasing and continuous.} \tag{A_φ}$$

$$g \in L^1(Q_T) \cap L^1(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^N)). \tag{A_g}$$

Please cite this article in press as: F. del Teso et al., On distributional solutions of local and nonlocal problems of porous medium type, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2017), https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.10.010