C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ●●● (●●●●) ●●●–●●●

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Potential theory/Complex analysis

On a constant in the energy estimate

Sur une constante dans l'estimation d'énergie

Rafał Czyż, Van Thien Nguyen

Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Jagiellonian University, Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków, Poland

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 25 October 2016
Accepted 5 September 2017
Available online xxxx

Presented by Jean-Pierre Demailly

A B S T R A C T

In this note, we prove that the constant $D(p,m)$ in the energy estimate, for m-subharmonic function with bounded p-energy, is strictly bigger than 1, for $p>0$, $p\neq 1$.

R É S U M É

Dans cette note, nous prouvons que la constante $D(p,m)$ dans l'estimation d'énergie, pour les fonctions m-sous-harmoniques avec p-énergie finie, est strictement supérieure à 1, pour $p>0$, $p\neq 1$.

Version française abrégée

Soit Ω un domaine m-hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$. On note $\mathcal{E}_{0,m}(\Omega)$ la classe des fonctions m-sous-harmoniques bornées dans Ω telles que

$$\lim_{z\to\partial\Omega} u(z)=0 \text{ and } \int_\Omega H_m(u)<+\infty,$$

où $\beta=dd^c|z|^2$ est la forme kählérinne standard sur $\mathbb{C}^n$ et $H_m(\cdot)=(dd^c(\cdot))^m\wedge\beta^{n-m}$ est l'opérateur hessien m-complexe. Pour chaque $p>0$, on note $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$ la classe des fonctions m-sous-harmoniques négatives u telles qu'il existe une suite décroissante $\{u_j\}\subset\mathcal{E}_{0,m}(\Omega)$ vérifiant

(i) $\lim_{j\to\infty} u_j=u$,
(ii) $\sup_j \int_\Omega (-u_j)^p H_m(u_j)=\sup_j e_{p,m}(u_j)<+\infty$.

E-mail addresses: Rafal.Czyz@im.uj.edu.pl (R. Czyż), Thien.Van.Nguyen@im.uj.edu.pl (V.T. Nguyen).

https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.09.019
1631-073X/

Nous remarquons que $e_{p,m}(u) = \int_\Omega (-u)^p H_m(u)$, la p-énergie m-pluricomplexe de la fonction u, est bornée pour tout $u \in \mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$ (voir [12]). Il résulte de [12] que l'opérateur hessien m-complexe est clairement défini pour la classe $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$.

Nous rappellerons l'estimation d'énergie cruciale pour la classe $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$.

Théorème 0.1. *Soient $u_0,\ u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$. Il existe une constante $D(p,m) \geq 1$ telle que*

$$\int_\Omega (-u_0)^p \mathrm{dd}^c u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{dd}^c u_m \wedge \beta^{n-m}$$
$$\leq D(p,m) e_{p,m}(u_0)^{\frac{p}{p+m}} e_{p,m}(u_1)^{\frac{1}{p+m}} \cdots e_{p,m}(u_m)^{\frac{1}{p+m}},$$

où

$$D(p,m) = \begin{cases} p^{-\frac{\alpha(p,m)}{1-p}}, & \textit{if } 0 < p < 1, \\ 1, & \textit{if } p = 1, \\ p^{\frac{p\alpha(p,m)}{p-1}}, & \textit{if } p > 1, \end{cases}$$

et $\alpha(p,m) = (p+2)\left(\frac{p+1}{p}\right)^{m-1} - (p+1)$.

La preuve de ce théorème se trouve dans [15] (voir aussi [3,12,14]). Il est important, pour la théorie des fonctions δ-plurisousharmoniques, de savoir si la constante $D(p,m)$ est égale à ou plus grande que 1. Si $D(p,m) = 1$ pour toutes les fonctions dans $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$, alors l'espace vectoriel $\delta\mathcal{E}_{p,m}(\Omega) = \mathcal{E}_{p,m}(\Omega) - \mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$ muni d'une certaine norme serait un espace de Banach (voir [2,15]). De plus, les preuves dans [2,15] pourraient être simplifiées, tandis que certaines seraient superflues. Pour le cas $m = n$, Åhag and Czyż ont montré qu'il existe des fonctions telles que $D(p,n)$ soit strictement supérieur à 1. En conséquence, nous nous posons la même question lorque $m < n$. Dans cette note, nous montrons que cela est encore vrai.

Théorème 0.2. *Pour $1 \leq m \leq n$, $p > 0$ $(p \neq 1)$, il existe des fonctions dans $\mathcal{E}_{p,m}(\mathbb{B})$, où $\mathbb{B}$ est la boule unité de $\mathbb{C}^n$, telles que la constante $D(p,m) > 1$.*

1. Introduction

A bounded domain $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ is said to be a m-hyperconvex domain if there exists a continuous m-subharmonic function $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}^-$ such that $\{\rho < -c\} \Subset \Omega$, for all $c > 0$. Let $\mathcal{E}_{0,m}(\Omega)$ denote the set of all bounded m-subharmonic functions u defined on Ω such that

$$\lim_{z \to \partial\Omega} u(z) = 0 \text{ and } \int_\Omega H_m(u) < +\infty,$$

where $\beta = \mathrm{dd}^c|z|^2$ is the canonical Kähler form in $\mathbb{C}^n$ and $H_m(\cdot) = (\mathrm{dd}^c(\cdot))^m \wedge \beta^{n-m}$ is the m-complex Hessian operator. For each $p > 0$, we define $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$ to be the class of all negative m-subharmonic functions u such that there exists a decreasing sequence $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_{0,m}(\Omega)$ such that

(i) $\lim_{j\to\infty} u_j = u$,
(ii) $\sup_j \int_\Omega (-u_j)^p H_m(u_j) = \sup_j e_{p,m}(u_j) < +\infty$.

We note that $e_{p,m}(u) = \int_\Omega (-u)^p H_m(u)$, the m-pluricomplex p-energy of the function u, is bounded for any u in $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$ (see [12]). It follows from [12] that the complex Hessian operator is well defined on $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$. For further information about the complex Hessian operator, we refer the reader to [6,9,13] (see also [4,5,7,8,10,11]).

We recall a crucial energy estimate for the class $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$.

Theorem 1.1. *Let $u_0,\ u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$. Then there exists a constant $D(p,m) \geq 1$ depending only on p and m such that*

$$\int_\Omega (-u_0)^p \mathrm{dd}^c u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{dd}^c u_m \wedge \beta^{n-m}$$
$$\leq D(p,m) e_{p,m}(u_0)^{\frac{p}{p+m}} e_{p,m}(u_1)^{\frac{1}{p+m}} \cdots e_{p,m}(u_m)^{\frac{1}{p+m}},$$

where

Please cite this article in press as: R. Czyż, V.T. Nguyen, On a constant in the energy estimate, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2017), https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.09.019