C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 1072–1076

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Harmonic analysis/Functional analysis

Hamming cube and martingales ☆

Cube de Hamming et martingales

Paata Ivanisvili [a,b,c,d], Fedor Nazarov [a], Alexander Volberg [e]

[a] *Kent State University, OH 44240, USA*
[b] *MSRI, USA*
[c] *Princeton University, USA*
[d] *University of California, Irvine, USA*
[e] *Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA*

A R T I C L E   I N F O

Article history:
Received 9 July 2017
Accepted after revision 19 September 2017
Available online 3 October 2017

Presented by Yves Meyer

A B S T R A C T

In the present paper, we show that a correctly chosen Legendre transform of the Bellman functions of martingale problems give us the right tool to prove isoperimetric inequalities on Hamming cube independent of the dimension. We illustrate the power of this “dual function approach” by proving certain Poincaré inequalities on Hamming cube and by improving a particular inequality of Beckner on the Hamming cube.

R É S U M É

Dans le présent article, nous montrons qu’une transformée de Legendre adéquate des fonctions de Bellman, issues de problèmes de martingale, fournit le bon outil pour démontrer les inégalités isopérimetriques sur le cube de Hamming, indépendamment de la dimension. Nous illustrons la puissance de cette « approche par fonction duale » en démontrant une inégalité de Poincaré et en améliorant une inégalité de Beckner sur le cube de Hamming.

Version française abrégée

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant, qui montre une dualité interessante entre les fonctions de Bellman issue de problèmes de martingale et les résultats isopérimetriques sur le cube de Hamming.

☆ We acknowledge the support of the following grants: FN – the grant from DMS of NSF, AV – NSF grant DMS-1600075. The results of this paper were obtained at the MSRI in Berkeley, California, 2017 program *Harmonic Analysis* under the NSF grant No. DMS-1440140.

E-mail addresses: pivanisv@kent.edu (P. Ivanisvili), nazarov@math.kent.edu (F. Nazarov), volberg@math.msu.edu (A. Volberg).

https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.09.013
1631-073X/

Théorème 0.1. *Soit $U(p,q)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ concave en p et convexe en q, telle que $\lim_{|p|\to\infty}(px+U(p,0))=-\infty$, $\lim_{q\to\infty}(-qy+U(0,q))=\infty$,*

$$2U(p,|q|)\geq U(p+a,\sqrt{a^2+|q|^2})+U(p-a,\sqrt{a^2+q^2}).$$

Alors $M(x,y):=\inf_{q\leq 0}\sup_p(px+qy+U(p,|q|))$, $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ satisfait l'inégalité à deux points suivante :

$$M(x,\|y\|)\geq\frac{1}{2}\left(M(x+a,\sqrt{a^2+\|y+b\|^2})+M(x-a,\sqrt{a^2+\|y-b\|^2})\right), \tag{1}$$

$x,a\in\mathbb{R}$, $y,b\in\mathbb{R}^N$, $N\geq 1$.

Théorème 0.2. *Soit $\Omega\subset\mathbb{R}$, et soit $M(x,y)$ une fonction satisfaisant (1), alors, pour chaque n et chaque $f:\{-1,1\}^n\to\Omega$, on a l'inégalité suivante*

$$\mathbb{E}_n M(f,|\nabla f|)\leq M(\mathbb{E}_n f,0)\,. \tag{2}$$

En combinant ces deux resultats, on obtient des inégalités nouvelles sur le cube. Bien entendu, on obtient aussi les inégalités isopérimetriques pour la mesure gaussienne. On illustre cette construction en démontrant certaines inégalités de Beckner et Poincaré sur le cube de Hamming.

1. Applications

Consider the Hamming cube $\{-1,1\}^n$ of an arbitrary dimension $n\geq 1$. For any $f:\{-1,1\}^n\to\mathbb{R}$ define the discrete gradient

$$|\nabla f|^2(x)=\sum_{y\sim x}\left(\frac{f(x)-f(y)}{2}\right)^2,$$

where the summation runs over all neighbor vertices of x in $\{-1,1\}^n$. Set $\mathbb{E}_n f=\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{-1,1\}^n}f(x)$.

Theorem 1.1. *For any $1<p\leq 2$, $n\geq 1$, and any $f:\{-1,1\}^n\to\mathbb{R}$, we have*

$$s_{p'}(\mathbb{E}_n|f|^p-|\mathbb{E}_n f|^p)^{1/p}\leq(\mathbb{E}_n|\nabla f|^p)^{1/p}. \tag{3}$$

Here $p'=\frac{p}{p-1}$ is the conjugate exponent of p, and by s_q we denote the smallest positive zero of the confluent hypergeometric function ${}_1F_1(-\frac{q}{2},\frac{1}{2},\frac{x^2}{2})$.

Let $\alpha\geq 2$, and let $N_\alpha(x)$ be the confluent hypergeometric function. $N_\alpha(x)$ satisfies the Hermite differential equation

$$N''_\alpha(x)-xN'_\alpha(x)+\alpha N_\alpha(x)=0 \quad \text{for} \quad x\in\mathbb{R} \tag{4}$$

with initial conditions $N_\alpha(0)=1$ and $N'_\alpha(0)=0$. In Theorem 1.1, s_α is the smallest positive zero of N_α, $\alpha=p'$.

Theorem 1.2. *For any $n\geq 1$, and any $f:\{-1,1\}^n\to\mathbb{R}$, we have*

$$\mathbb{E}_n\,\Re\,(f+i|\nabla f|)^{3/2}\leq\Re(\mathbb{E}_n f)^{3/2}, \tag{5}$$

where $z^{3/2}$ is taken in the sense of the principal branch in the upper half-plane.

Inequality (5) improves Beckner's bound for exponent $p=3/2$, see [7]. The function $M(x,y)=\Re\,(x+i\,y)^{3/2}$ is in fact

$$M(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}(2x-\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}. \tag{6}$$

Inequality (5) takes the dimension free form

$$\mathbb{E}_n\,M(f,|\nabla f|)\leq M(\mathbb{E}_n\,f,0), \tag{7}$$

where $\mathbb{E}_n$ is the expectation on the Hamming cube $\{-1,1\}^n$. As it is easy to see that pointwisely

$$x^{3/2}-\frac{3}{8}x^{-1/2}y^2\leq\frac{1}{\sqrt{2}}(2x-\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}, \quad x\geq 0,$$