C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ••• (••••) •••–•••

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Topology/Differential topology

On maps which are the identity on the boundary

Sur les applications qui sont l'identité sur la frontière

Albert Fathi [1]

Georgia Institute of Technology and ENS de Lyon (Emeritus), School of Mathematics, 686 Cherry St NW, Atlanta, GA 30313, USA

ARTICLE INFO

Article history:
Received 2 December 2016
Accepted after revision 29 August 2017
Available online xxxx

Presented by Claire Voisin

ABSTRACT

The following fact seems to have been unnoticed until now:
Let F be a closed subset of the (finite-dimensional) connected manifold M. If $f : F \to M$ is a proper continuous map which is the identity on the boundary ∂F of F in M, then either $f(F) \supset F$ or $f(F) \supset M \setminus F$.
The proof is elementary and simple using degree theory.
The statement has many deep consequences.

RÉSUMÉ

Le fait suivant ne semble pas être connu :
Soit F un sous-ensemble fermé de la variété connexe M (de dimension finie). Si $f : F \to M$ est une application continue et propre qui est l'identité sur la frontière ∂F de F dans M, alors, on a, soit $f(F) \supset F$, soit $f(F) \supset M \setminus F$.
La preuve, qui utilise la théorie du degré, est élémentaire et simple.
Ce fait a des conséquences profondes.

Version française abrégée

Le fait suivant ne semble pas être connu :

Théorème 0.1. *Soit F un sous-ensemble fermé de la variété connexe (de dimension finie) M. Si $f : F \to M$ est une application continue qui est l'identité sur la frontière ∂F de F dans M, alors, soit $f(F) \supset F$, soit $f(F) \supset M \setminus F$.*

De plus, si f est proprement homotope à l'inclusion $F \subset M$ relativement à ∂F, on a nécessairement $f(F) \supset F$.

E-mail address: albert.fathi@math.gatech.edu.

[1] Work supported by ANR-12-BS01-0020 WKBHJ.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2017.08.001
1631-073X/

Rappelons que f est proprement homotope à l'inclusion $F \subset M$ relativement à ∂F, s'il existe une application $H : F \times [0,1] \to M$ continue et propre telle que $H(x,0) = x$, $H(x,1) = f(x)$ pour tout $x \in F$ et $H(x,t) = x$ pour tout $(x,t) \in \partial F \times [0,1]$.

Le résultat ci-dessus a des conséquences profondes. Nous en mentionnons quelques-unes ici.

Corollaire 0.2. *Soit F un sous-ensemble fermé, d'intérieur $\mathring{F}$ non vide, de la variété connexe M. Il n'existe pas de rétraction continue et propre de F sur sa frontière ∂F.*

Corollaire 0.3. *Soit F un sous-ensemble fermé de la variété connexe M. Si $H : F \times [0,1] \to M$ est une homotopie continue telle que $H(x,0) = x$, pour tout $x \in F$, et $H \mid F \times \{1\}$ est constante, alors on a obligatoirement une des deux possibilités suivantes :*

(i) *pour toute composante connexe relativement compacte C de $M \setminus F$, on a $H(\partial C \times [0,1]) \supset C$;*
(ii) *il existe une composante connexe relativement compacte C de $M \setminus F$ avec $H(\partial C \times [0,1]) \supset M \setminus C$.*

En particulier, on a :

(a) *si M est compacte, alors $H(F \times [0,1])$ contient toutes les composantes connexes de $M \setminus F$, sauf peut-être au plus une ;*
(b) *si M n'est pas compacte, alors $H(F \times [0,1])$ contient toutes les composantes connexes relativement compactes de $M \setminus F$.*

L'homotopie H du corollaire ci-dessus ne peut pas être propre, sauf si F est compact. Une version propre de ce corollaire est donnée par le résultat ci-dessous.

Théorème 0.4. *Soit F un sous-ensemble fermé de la variété connexe M. Si $H : F \times [0,1[\to M$ est une homotopie continue et propre telle que $H(x,0) = x$, pour tout $x \in F$, alors $H(F \times [0,1[)$ contient toutes les composantes connexes de $M \setminus F$, sauf peut-être au plus une.*

Théorème 0.5. *Soit $h : M \to M$ un homéomorphisme de la variété connexe M (de dimension finie). Si on note par $\mathrm{Fix}(h)$ l'ensemble des points fixes de h, on a :*

(i) *soit $h(C) = C$ pour toute composante connexe de $M \setminus \mathrm{Fix}(h)$;*
(ii) *soit $M \setminus \mathrm{Fix}(h)$ a exactement deux composantes connexes qui sont permutées par h.*

De plus, si M est orientable et h préserve l'orientation, alors $h(C) = C$ pour toute composante connexe de $M \setminus \mathrm{Fix}(h)$.

La plupart des énoncés ci-dessus peuvent être améliorés, parfois substantiellement. Une version détaillée de ce travail contiendra ces améliorations.

1. Statements

The following fact seems to have been unnoticed until now.

Theorem 1.1. *Let F be a closed subset of the (finite-dimensional) connected manifold M. If $f : F \to M$ is a proper continuous map which is the identity on the boundary ∂F of F in M, then either $f(F) \supset F$ or $f(F) \supset M \setminus F$.*

Moreover, if f is properly homotopic to the inclusion $F \subset M$ modulo ∂F, we must have $f(F) \supset F$.

We recall that f is properly homotopic to the inclusion $F \subset M$ modulo ∂F if there exists a proper continuous map $H : F \times [0,1] \to M$ such that $H(x,0) = x$, $H(x,1) = f(x)$, for all $x \in F$, and $H(x,t) = x$, for all $(x,t) \in \partial F \times [0,1]$.

Theorem 1.1 has several deep consequences; we mention here some of them.

Corollary 1.2. *Let F be a closed subset with non-empty interior $\mathring{F}$ of the connected manifold M. There does not exist a continuous proper retraction of F on its boundary ∂F.*

The corollary above is well known for the unit ball of an Euclidean space: it is one of the equivalent forms of Brouwer's fixed point theorem. It is also known when the boundary of F is a smooth submanifold of M [3, Proposition 7.1, page 133]. Moreover, there is a simple proof in [1, 3.6, page 12] when F is a general compact subset of the Euclidean space M.

This shows of course that the proof of the theorem must use some deep topological fact.

Corollary 1.3. *Let F be a closed subset of the connected manifold M. If $H : F \times [0,1] \to M$ is a continuous homotopy such that $H(x,0) = x$, for all $x \in F$, and $H \mid F \times \{1\}$ is constant, then one of the following two possibilities holds:*