C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 515–521

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations/Calculus of variations

Interaction energy between vortices of vector fields on Riemannian surfaces

Énergie d'interaction entre les tourbillons des champs de vecteurs sur une surface riemannienne

Radu Ignat [a], Robert L. Jerrard [b]

[a] *Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul-Sabatier, 31062 Toulouse, France*
[b] *Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 23 January 2017
Accepted 7 April 2017
Available online 20 April 2017

Presented by Haïm Brézis

ABSTRACT

We study a variational Ginzburg–Landau-type model depending on a small parameter $\varepsilon > 0$ for (tangent) vector fields on a 2-dimensional Riemannian surface. As $\varepsilon \to 0$, the vector fields tend to be of unit length and will have singular points of a (non-zero) index, called vortices. Our main result determines the interaction energy between these vortices as a Γ-limit (at the second order) as $\varepsilon \to 0$.

RÉSUMÉ

Nous étudions un modèle variationnel de type Ginzburg–Landau (dépendant d'un petit paramètre $\varepsilon > 0$) pour des champs de vecteurs (tangents) sur une surface riemannienne. Lorsque $\varepsilon \to 0$, ces champs de vecteurs auront des points singuliers d'indice non nul, appelés tourbillons. Notre résultat détermine l'énergie d'interaction entre les tourbillons en tant que Γ-limite (au second ordre) pour $\varepsilon \to 0$.

Version française abrégée

Soit (S, g) une surface riemannienne orientée compacte, connexe, sans bord, de dimension 2 et de genre $\mathfrak{g}$. Nous considérons la fonctionnelle de Ginzburg–Landau E_ε (voir (1)) dépendant d'un petit paramètre $\varepsilon > 0$ pour des champs de vecteurs (tangents) $u : S \to TS$, i.e. $u(x) \in T_xS$ pour tout $x \in S$, où $TS = \cup_{x \in S} T_xS$ est le fibré tangent. Lorsque $\varepsilon \to 0$, ces champs tendent à être de module un (i.e. $|u|_g = 1$ sur S) et génèrent des points singuliers a_k appelés tourbillons. Les tourbillons a_k sont caractérisés par des indices (ou degrés topologiques) $d_k \in \mathbb{Z}$ qui quantifient l'énergie E_ε autour de a_k (i.e. $\pi d_k^2 |\log \varepsilon|$ au

E-mail addresses: Radu.Ignat@math.univ-toulouse.fr (R. Ignat), rjerrard@math.toronto.edu (R.L. Jerrard).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2017.04.004
1631-073X/

premier ordre) et satisfont la relation d'invariance topologique (3) ; de plus, les tourbillons a_k et leur degrés d_k sont détectés par la vorticité $\omega(u)$.

Notre premier objectif est de déterminer l'énergie d'interaction entre ces tourbillons (appelée énergie renormalisée) donnée par le développement à l'ordre deux de l'énergie E_ε. Ceci repose sur la notion de champ de vecteur canonique harmonique u^* (voir Section 2), qui dépend non seulement de la configuration $a = (a_k)$ et $d = (d_k)$, mais aussi d'un vecteur $\Phi \in \mathbb{R}^{2\mathfrak{g}}$ qui englobe les intégrales de flux de u^* (voir (8)). En effet, l'énergie renormalisée $W(a, d, \Phi)$ représente l'énergie de Dirichlet associée à u^* en dehors de petites boules centrées en a_k (voir le livre innovateur de Bethuel–Brezis–Hélein [3]). Nous calculons une formule exacte de $W(a, d, \Phi)$ (voir (14)) en utilisant les fonctions de Green en (a_k) ainsi que la fonction $\psi_0 = (-\Delta)^{-1}(-\kappa + \bar{\kappa})$, où κ est la courbure de Gauss sur S et $\bar{\kappa}$ est la moyenne de κ sur S. L'énergie renormalisée détermine la position optimale des tourbillons (a_k) pour les configurations limites u^* des minimiseurs u_ε de E_ε lorsque $\varepsilon \to 0$; dans le cas de la sphère unité S munie de la métrique standard, la formule (14) montre que les configurations optimales sont données par les couples de deux tourbillons (a_1, a_2) diamétralement opposés, de degrés $d_1 = d_2 = 1$.

Notre résultat principal consiste à établir la Γ-convergence de E_ε à l'ordre deux. Plus précisément, nous montrons la compacité des vorticités $\omega(u_\varepsilon)$ et des intégrales de flux $\Phi(u_\varepsilon)$ pour des champs de vecteurs u_ε d'énergie d'ordre $|\log\varepsilon|$. Ensuite, nous établissons les bornes inférieures et supérieures de E_ε à l'ordre deux qui font apparaître l'énergie renormalisée. Les preuves des résultats annoncés dans cette note font partie de notre article [9].

1. Introduction

Let (S, g) be a closed (i.e. compact, connected without boundary) oriented 2-dimensional Riemannian manifold of genus $\mathfrak{g}$. We will focus on (tangent) vector fields

$$u : S \to TS, \quad \text{i.e. } u(x) \in T_xS \text{ for every } x \in S$$

where $TS = \cup_{x \in S} T_xS$ is the tangent bundle of S. It is well known that there are no smooth vector fields $\mathcal{X}(S)$ (or more generally, of Sobolev regularity $\mathcal{X}^{1,2}(S)$) of unit length $|u|_g = 1$ on S (unless $\mathfrak{g} = 1$). In fact, vector fields of unit length have in general singular points with a (non-zero) index. Our aim is to determine the interaction energy between these singular points in a variational model of Ginzburg–Landau type depending on a small parameter $\varepsilon > 0$, where the penalty $|u|_g = 1$ in S is relaxed.

Model. For vector fields $u : S \to TS$, we define the energy functional

$$E_\varepsilon(u) = \int_S e_\varepsilon(u)\,\mathrm{vol}_g, \quad e_\varepsilon(u) := \frac{1}{2}|\mathrm{D}u|_g^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}F(|u|_g^2), \tag{1}$$

where $|\mathrm{D}u|_g^2 := |\mathrm{D}_{\tau_1}u|_g^2 + |\mathrm{D}_{\tau_2}u|_g^2$ in S, vol_g is the volume 2-form on (S, g) and D_v denotes covariant differentiation (with respect to the Levi-Civita connection) of u in direction v and $\{\tau_1, \tau_2\}$ is any local orthonormal basis of TS. The potential $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is a continuous function with $F(1) = 0$ and there exists some $c > 0$ such that $F(s^2) \ge c(1 - s)^2$ for every $s \ge 0$; in particular, 1 is the unique zero of F. The parameter $\varepsilon > 0$ is small penalizing $|u|_g \ne 1$ in S; the goal is to analyze the asymptotic behavior of E_ε in the framework of Γ-convergence (at first and second order) in the limit $\varepsilon \to 0$. This is a "toy" problem for some physical models arising for thin shells in micromagnetics and in nematic liquid crystals (see, e.g., [4,5]).

Connection 1-form. On an open subset $O \subset S$, a moving frame is a pair of smooth, properly oriented, orthonormal vector fields $\tau_k \in \mathcal{X}(O)$, $k = 1, 2$, i.e. $(\tau_k, \tau_l)_g = \delta_{kl}$, $k, l = 1, 2$, and $\mathrm{vol}_g(\tau_1, \tau_2) = 1$ in O, where $(\cdot, \cdot)_g$ is the scalar product on TS. (We will use the same notation $(\cdot, \cdot)_g$ for the inner product associated with k-forms, $k = 0, 1, 2$.) Defining $i : TS \to TS$ such that i is an isometry of T_xS to itself for every $x \in S$ satisfying

$$i^2 w = -w, \qquad (iw, v)_g = -(w, iv)_g = \mathrm{vol}_g(w, v),$$

then every smooth vector field $\tau \in \mathcal{X}(O)$ of unit length provides a moving frame $\{\tau_1, \tau_2\} := \{\tau, i\tau\}$ on O. Moreover, if $\{\tau_1, \tau_2\}$ is any moving frame in O, then $\tau_2 = i\tau_1$.[1] Given a moving frame $\{\tau_1, \tau_2\}$ on an open subset $O \subset S$, the *connection 1-form* A associated with $\{\tau_1, \tau_2\}$ is defined for every smooth vector field $v \in \mathcal{X}(O)$:

$$A(v) := (\mathrm{D}_v\tau_2, \tau_1)_g = -(\mathrm{D}_v\tau_1, \tau_2)_g \qquad \text{in } O.$$

In particular, $\mathrm{D}_v\tau_1 = -A(v)\tau_2$ and $\mathrm{D}_v\tau_2 = A(v)\tau_1$ in O. The definition of A depends on the choice of the moving frame. However, the exterior derivative $\mathrm{d}A$ of the connection 1-form is independent of the moving frame; in particular, the following identity holds $\mathrm{d}A = \kappa\ \mathrm{vol}_g$, where κ is the Gaussian curvature of S (see [7], Proposition 2, Chapter 5.3). We recall the Gauss–Bonnet theorem, which states

[1] In general a moving frame exists only locally on S.