C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 522–525

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations

Almost global well-posedness of Kirchhoff equation with Gevrey data

L'équation de Kirchhoff avec données de Gevrey est presque globalement bien posée

Tokio Matsuyama [a], Michael Ruzhansky [b]

[a] *Department of Mathematics, Chuo University, 1-13-27, Kasuga, Bunkyo-ku, Tokyo 112-8551, Japan*
[b] *Department of Mathematics, Imperial College London, 180 Queen's Gate, London SW7 2AZ, United Kingdom*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 26 November 2016
Accepted after revision 3 April 2017
Available online 18 April 2017

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

The aim of this note is to present the almost global well-posedness result for the Cauchy problem for the Kirchhoff equation with large data in Gevrey spaces. We also briefly discuss the corresponding results in bounded and in exterior domains.

RÉSUMÉ

Le propos de cette Note est d'énoncer que l'équation de Kirchhoff avec des données grandes dans les espaces de Gevrey est presque globalement bien posée. Nous discutons aussi brièvement les résultats correspondants dans les domaines bornés et les domaines extérieurs.

Version française abrégée

Dans cette note, nous considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Kirchhoff

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t,y)|^2 \, dy\right) \Delta u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Cette équation a une longue histoire. Elle est apparue comme un modèle pour le mouvement d'une chaîne dans le livre [10] de Kirchhoff. Bernstein a prouvé dans [2] l'existence d'une solution analytique globale en temps sur un intervalle de la ligne réelle. Arosio et Spagnolo ont discuté dans [1] des solutions analytiques en dimensions spatiales plus élevées. D'Ancona et Spagnolo prouvent dans [4] que l'équation de Kirchhoff dégénérée est analytiquement bien posée, en liaison avec un travail

E-mail addresses: tokio@math.chuo-u.ac.jp (T. Matsuyama), m.ruzhansky@imperial.ac.uk (M. Ruzhansky).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2017.04.001

de Kajitani et Yamaguti [9]. Dans la classe quasi-analytique, il est connu que des solutions globales existent – voir [7,15,16]. De plus, Manfrin [11] a montré l'existence de solutions globales en temps dans des espaces de Sobolev correspondant à des données non analytiques ayant un trou spectral – voir aussi [8] et Ghisi et Gobbino [6,5].

Pour les petites données, des résultats beaucoup plus nombreux sont disponibles. Ici, nous nous référons à [12], qui donne une revue détaillée de la littérature sur les solutions de (1) ainsi que les résultats sur les petites données les plus récents. Dans cette note, nous sommes intéressés à l'existence de solutions pour les grandes données. Aussi nous référons-nous simplement à [13] pour un survol des grandes et surtout des petites données. Ces résultats seront publiés dans [14].

1. Introduction

In this paper, we consider the Cauchy problem for the Kirchhoff equation:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t,y)|^2 \,\mathrm{d}y\right) \Delta u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), & \qquad\quad\; x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

This equation has a long history, having appeared as a model for the string motion in the book [10] of Kirchhoff. Bernstein [2] proved for it the existence of global in time analytic solutions on an interval of the real line. Arosio and Spagnolo [1] discussed analytic solutions in higher spatial dimensions, and in [4] D'Ancona and Spagnolo proved analytic well-posedness for the degenerate Kirchhoff equation, with a related work by Kajitani and Yamaguti [9]. In the quasi-analytic class, it is known that global solutions exist, see [7,15,16]. Moreover, Manfrin [11] showed the existence of time global solutions in Sobolev spaces corresponding to non-analytic data having a spectral gap, see also [8]. For the existence of local solutions in Gevrey spaces, we refer the reader to the results of Ghisi and Gobbino (see [6,5]).

For small data, many more results are available. Here we refer the reader to [12], where a detailed literature review for solutions to (2) is given, as well as the most recent results on small data. In this note, we are interested in the existence of solutions for large data, so we only refer to [13] for a detailed survey dealing with large, but especially with small data. The results announced in this note will appear in [14].

2. Statement of results

In this section, we discuss the existence of solutions to (2) for Gevrey data. Let us recall the definition of the Gevrey class of L^2 type. For $s \ge 1$, we denote by $\gamma^s_{L^2} = \gamma^s_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ the Roumieu–Gevrey class defined by

$$\gamma^s_{L^2} = \bigcup_{\eta>0} \gamma^s_{\eta,L^2},$$

where $f \in \gamma^s_{\eta,L^2}$ if

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\eta|\xi|^{1/s}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < \infty.$$

Here $\widehat{f}(\xi)$ is the Fourier transform of $f(x)$. The class $\gamma^s_{L^2}$ is endowed with the inductive limit topology. In particular, if $s = 1$, then $\gamma^1_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ is the class $\mathcal{A}_{L^2}$ of the analytic functions on $\mathbb{R}^n$. The spaces γ^s_{η,L^2} are normed spaces with norms

$$\|f\|_{\gamma^s_{\eta,L^2}} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\eta|\xi|^{1/s}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \right]^{1/2}.$$

We also denote

$$\|(f,g)\|_{\gamma^s_{\eta,L^2}\times\gamma^s_{\eta,L^2}} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\eta|\xi|^{1/s}} \left\{ |\widehat{f}(\xi)|^2 + |\widehat{g}(\xi)|^2 \right\} \mathrm{d}\xi \right]^{1/2}$$

for $\eta > 0$.

A special feature of the equation (2) is its Hamiltonian structure: for the energy

$$\mathcal{H}(u;t) := \frac{1}{2}\left\{ \|\nabla u(t)\|^2_{L^2} + \|\partial_t u(t)\|^2_{L^2} \right\} + \frac{1}{4}\|\nabla u(t)\|^4_{L^2},$$

we have

$$\mathcal{H}(u;t) = \mathcal{H}(u;0)$$

on the interval of the existence of solutions.

The following result gives the almost global existence for Gevrey solutions for (2) with large Gevrey data.