C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ••• (••••) •••–•••

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations/Calculus of variations

# On the topology of the set of singularities of a solution to the Hamilton–Jacobi equation

## *Sur la topologie des singularités d'une solution de l'équation de Hamilton–Jacobi*

Piermarco Cannarsa[a,1], Wei Cheng[b,2], Albert Fathi[c,3]

[a] *Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata", Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma, Italy*
[b] *Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China*
[c] *ENS de Lyon & IUF, UMPA, 46, allée d'Italie, 69007 Lyon, France*

A R T I C L E I N F O

*Article history:*
Received 22 September 2016
Accepted 19 November 2016
Available online xxxx

Presented by Cédric Villani

A B S T R A C T

We address the topology of the set of singularities of a solution to a Hamilton–Jacobi equation. For this, we will apply the idea of the first two authors (Cannarsa and Cheng, Generalized characteristics and Lax–Oleinik operators: global result, preprint, arXiv:1605.07581, 2016) to use the positive Lax–Oleinik semi-group to propagate singularities.



R É S U M É

Nous étudions l'ensemble des singularités d'une solution de l'équation de Hamilton–Jacobi. Pour cette étude, nous utilisons une idée due aux deux premiers auteurs (Cannarsa and Cheng, Generalized characteristics and Lax–Oleinik operators: global result, preprint, arXiv:1605.07581, 2016) pour propager les singularités en utilisant le semi-groupe positif de Lax–Oleinik.



### Version française abrégée

Nous étudions la topologie de l'ensemble des singularités d'une solution de l'équation de Hamilton–Jacobi et leur propagation.

*E-mail addresses:* cannarsa@mat.uniroma2.it (P. Cannarsa), chengwei@nju.edu.cn (W. Cheng), albert.fathi@ens-lyon.fr (A. Fathi).

[1] Work supported by the University of Rome Tor Vergata: Consolidate the Foundation 2014 Project "Irreversibility in Dynamic Optimization" and Istituto Nazionale di Alta Matematica: GNAMPA 2016 Project "Controllo, regolarità e viabilità per alcuni tipi di equazioni diffusive" (INdAM).

[2] Work supported by the Natural Scientific Foundation of China (Grants No. 11271182 and No. 11471238) and the National Basic Research Program of China (Grant No. 2013CB834100).

[3] Work supported by ANR-12-BS01-0020 WKBHJ.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.12.004

Nous supposons connue la notion de solution de viscosité ainsi que la théorie KAM faible, voir [6], qui est bien adapté à nos besoins.

Soit $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien de Tonelli sur la variété compacte connexe $M$. En particulier, le hamiltonien $H$ est au moins $C^2$. On considère une solution de viscosité (ou KAM faible) $u : M \to \mathbb{R}$ de l'équation stationnaire de Hamilton–Jacobi

$$H(x, d_x u) = c[0], \tag{1}$$

où $c[0]$ est la constante critique de Mañé. Nous désignons par $\Sigma(u)$ l'ensemble des points $x \in M$ où $u$ n'est pas différentiable, et par $\mathcal{I}(u)$ l'ensemble d'Aubry de $u$. Nous introduisons aussi l'ensemble $\mathrm{Cut}(u)$ des points de coupure de $u$ comme étant l'ensemble des points $x \in M$ où aucune courbe caractéristique en temps négatif de $u$ aboutissant en $x$ ne peut être étendue au-delà de $x$ en une courbe $u$-calibrée ; de manière équivalente, si $\gamma : [a, b] \to M$ est une courbe $u$-calibrée avec $x \in \gamma([a, b])$, alors $x = \gamma(b)$. On a $\Sigma(u) \subset \mathrm{Cut}(u) \subset M \setminus \mathcal{I}(u)$, et $\Sigma(u) \subset \mathrm{Cut}(u) \subset \overline{\Sigma(u)}$.

**Théorème 0.1.** *Les inclusions $\Sigma(u) \subset \mathrm{Cut}(u) \subset \overline{\Sigma(u)} \cap (M \setminus \mathcal{I}(u)) \subset M \setminus \mathcal{I}(u)$ sont toutes des équivalences d'homotopies.*

Il en résulte le corollaire suivant.

**Corollaire 0.2.** *Pour toute composante connexe $C$ de $M \setminus \mathcal{I}(u)$, les trois intersections $\Sigma(u) \cap C$, $\mathrm{Cut}(u) \cap C$ et $\overline{\Sigma(u)} \cap C$ sont connexes par arcs.*

**Théorème 0.3.** *Les espaces $\Sigma(u)$, and $\mathrm{Cut}(u)$ sont localement contractiles, c'est-à-dire que pour tout $x \in \Sigma(u)$ (resp. $x \in \mathrm{Cut}(u)$) et tout voisinage $V$ de $x$ dans $\Sigma(u)$ (resp. $\mathrm{Cut}(u)$), on peut trouver un voisinage $W$ de $x$ dans $\Sigma(u)$ (resp. $\mathrm{Cut}(u)$), tel que $W \subset V$ et que $W$ soit homotope à une constante dans $V$.*

*Par conséquent, $\Sigma(u)$ et $\mathrm{Cut}(u)$ sont localement connexes par arcs.*

Par soucis de brièveté et de clarté, nous avons énoncé nos résultats pour l'équation de Hamilton–Jacobi stationnaire (1). Toutefois, ils sont aussi valides pour l'équation de Hamilton–Jacobi sous forme évolution

$$\partial_t U + H(x, \partial_x U) = 0, \tag{2}$$

où $U : M \times [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ est continue et est solution de viscosité de (2) sur $M \times ]0, +\infty[$.

De plus, sous des conditions appropriées sur l'hamiltonien, les résultats sont encore valables quand $M$ n'est pas compacte. Nous pouvons aussi considérer le cas des problèmes de Dirichlet.

Il est aussi possible d'utiliser nos méthodes pour obtenir les mêmes résultats pour la fonction distance à un fermé dans une variété riemannienne complète.

La version complète de ce travail comportera les détails nécessaires.

Notons que pour propager globalement les singularités, nous utilisons l'idée due aux deux premiers auteurs (Generalized characteristics and Lax–Oleinik operators: global result, preprint, arXiv:1605.07581, 2016) de se servir du semi-groupe positif de Lax–Oleinik. Notons aussi que, bien que les résultats et les démonstrations des deux théorèmes énoncés ci-dessus soient originaux, un cas particulier du premier théorème pour les fonctions distances sur les variétés riemanniennes était déjà connu, voir [1].

## 1. Introduction

We address the problem of propagation of singularities and the topology of the set of singularities of a viscosity solution to a Hamilton–Jacobi equation.

We assume familiarity with the notion of viscosity solution and weak KAM theory, see [6], which is relevant to our manifold framework. Let $H : T^*M \to \mathbb{R}$ be a Tonelli Hamiltonian on the compact connected manifold $M$; in particular, the Hamiltonian $H$ is at least $C^2$. We consider $u : M \to \mathbb{R}$ a viscosity (or weak KAM) solution to the Hamilton–Jacobi equation

$$H(x, d_x u) = c[0], \tag{3}$$

where $c[0]$ is Mañé's critical value. We denote by $\Sigma(u)$ the set of points $x \in M$, where $u$ is not differentiable, and by $\mathcal{I}(u)$ the Aubry set of $u$. We also introduce the set $\mathrm{Cut}(u)$ of cut points of $u$, as the set of points $x \in M$ where no backward characteristic for $u$ ending at $x$ can be extended to a $u$-calibrating curve beyond $x$; equivalently, if $\gamma : [a, b] \to M$ is a $u$-calibrating curve with $x \in \gamma([a, b])$ then $x = \gamma(b)$. We have $\Sigma(u) \subset \mathrm{Cut}(u) \subset M \setminus \mathcal{I}(u)$, and $\Sigma(u) \subset \mathrm{Cut}(u) \subset \overline{\Sigma(u)}$.

**Theorem 1.1.** *The inclusion $\Sigma(u) \subset \mathrm{Cut}(u) \subset \overline{\Sigma(u)} \cap (M \setminus \mathcal{I}(u)) \subset M \setminus \mathcal{I}(u)$ are all homotopy equivalences.*

This theorem obviously implies the following corollary (see, for instance, [5]).