C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 1188–1194

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations/Numerical analysis

An online intrinsic stabilization strategy for the reduced basis approximation of parametrized advection-dominated problems

Une stratégie intrinsèque de stabilisation en ligne pour l'approximation bases réduites de problèmes paramètrés avec transport dominant

Yvon Maday [a,b,c], Andrea Manzoni [d], Alfio Quarteroni [d]

[a] *Sorbonne Universités, UPMC Université Paris-6 and CNRS UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis-Lions, 75005 Paris, France*
[b] *Institut universitaire de France, France*
[c] *Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence RI, USA*
[d] *CMCS–MATHICSE–SB, École polytechnique fédérale de Lausanne, Station 8, CH-1015 Lausanne, Switzerland*

A R T I C L E   I N F O

Article history:
Received 22 May 2016
Accepted after revision 11 October 2016
Available online 14 November 2016

Presented by Olivier Pironneau

A B S T R A C T

We propose a new, black-box online stabilization strategy for reduced basis (RB) approximations of parameter-dependent advection–diffusion problems in the advection-dominated case. Our goal is to stabilize the RB problem irrespectively of the stabilization (if any) operated on the high-fidelity (e.g., finite element) approximation, provided a set of stable RB functions have been computed. Inspired by the *spectral vanishing viscosity* method, our approach relies on the transformation of the basis functions into modal basis, then on the addition of a vanishing viscosity term over the high RB modes, and on a *rectification* stage – prompted by the *spectral filtering technique* – to further enhance the accuracy of the RB approximation. Numerical results dealing with an advection-dominated problem parametrized with respect to the diffusion coefficient show the accuracy of the RB solution on the whole parametric range.

R É S U M É

Nous proposons une nouvelle strategie pour stabiliser l'approximation d'un problème de diffusion–transport avec transport dominant par une méthode de bases réduites. Cette stra-tegie, opérée en ligne, est indépendante de la technique « haute fidélité » utilisée « hors ligne » ; elle trouve son inspiration dans la méthode de la *viscosité spectrale évanescente*. Par une diagonalisation sur l'espace de base réduite, on introduit une nouvelle base modale, qui permet d'ajouter au problème réduit un terme de viscosité évanescent sur les modes suffisant pour stabiliser l'approximation. Une méthode de rectification de la solution (semblable aux techniques de filtrage spectral) de ce problème est enfin opérée afin d'améliorer la précision de cette approximation. Les résultats numériques obtenus pour un problème

E-mail addresses: maday@ann.jussieu.fr (Y. Maday), andrea.manzoni@epfl.ch (A. Manzoni), alfio.quarteroni@epfl.ch (A. Quarteroni).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.10.008
1631-073X/

avec transport dominant dont l'intensité est parametrisée montrent que l'approximation réduite résultante est stable et précise sur tout l'intervalle des paramètres.

Version française abrégée

Nous proposons dans cette note une nouvelle approche pour traiter le problème des instabilités apparaissant lors de l'approximation de problèmes de diffusion–transport avec transport dominant par des méthodes de bases réduites (RB). Ces instabilités sont un problème classique, quelle que soit la discrétisation utilisée, qui peut être traité en raffinant le maillage de façon extrême ou en ajoutant des termes de stabilisation appropriés. Dans le cas RB, nous pouvons nous appuyer sur un ensemble de N fonctions de base, dont chacune est obtenue grâce à une technique classique d'éléments finis *stable*, comme la méthode SUPG, basée sur $N_h \gg N$ degrés de liberté. Néanmoins, la combinaison de ces fonctions à travers une méthode de Galerkin pure ne suffit pas à assurer la stabilité du problème RB quand N augmente, d'où la nécessité d'introduire des termes de stabilisation appropriés au niveau RB (Section 1).

Naturellement, l'espace réduit pour le problème de diffusion–transport doit être indépendant de la méthode classique utilisée pour générer les fonctions de base réduite. Il en est de même pour le schéma, d'autant plus qu'il n'est pas souhaitable – difficile, voire impossible – de disposer de sa traduction en terme d'algèbre matricielle. Nous proposons ici une technique de stabilisation « en ligne », indépendante de la stabilisation utilisée lors de la création de l'espace réduit. Ceci nous permet d'introduire une stabilisation plus faible que celle utilisée dans la technique SUPG et plus simple à mettre en œuvre. Elle s'inspire de la méthode de la *viscosité spectrale évanescente* [8] et repose sur trois étapes (voir la Section 2). On construit tout d'abord « hors ligne » la matrice $\mathbb{Z}$ dont les colonnes sont les vecteurs de la base réduite (préalablement orthonormalisées pour assurer un bon conditionnement du système réduit) :

1) nous obtenons une nouvelle base modale $\tilde{\mathbb{Z}}$ par rotation de $\mathbb{Z}$, selon les vecteurs propres du Laplacien réduit ;
2) dans l'étape « en ligne », nous ajoutons un terme de *viscosité* diagonal (dans cette base), dont l'amplitude est nulle sur les modes les plus bas et augmente sur les modes plus hauts ; on calcule au point 2 la solution du problème réduit, notée $\tilde{u}_N^{vv}(\mu)$;
3) nous déterminons enfin l'approximation RB $u_N^{vv}(\mu)$ en opérant la méthode de *rectification* proposée dans [1] à la solution $\tilde{u}_N^{vv}(\mu)$ afin d'en augmenter la précision (voir la Section 3).

Cette stratégie permet de stabiliser de façon intrinsèque l'approximation en base réduite lors de l'étape en ligne, reposant des structures algébriques qui peuvent être construites indépendamment de l'approximation classique (ici, SUPG) utilisée. Les résultats numériques présentés dans la Section 4 montrent la faisabilité de la technique proposée et la notable amélioration des résultats ainsi stabilisés fournie par la méthode de rectification.

1. Existing stabilization approaches for Galerkin–RB approximations

Let us consider, for the sake of exposition, the following parametrized advection–diffusion problem:

$$\begin{cases} L(\mu)u := -\mu\Delta u + \mathbf{b}\cdot\nabla u = f & \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\mu \in \mathcal{P} = [10^{-6}, 1]$ denotes the diffusion coefficient and $\mathbf{b} = (1,1)^T$ the (constant) transport field. The weak form of problem (1) is: find $u(\mu) \in V$ such that

$$a(u(\mu), v; \mu) = F(v) \qquad \forall v \in V, \tag{2}$$

being $V = H_0^1(\Omega)$,

$$a(u, v; \mu) = \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{b}\cdot\nabla u\, v \, d\mathbf{x}, \qquad F(v) = \int_\Omega f v \, d\mathbf{x}$$

a continuous and coercive bilinear form, for any $\mu \in \mathcal{P}$, and a linear and continuous functional, respectively; note that only a is μ-dependent. The so-called *high-fidelity* solution to problem (2) is obtained by a Galerkin–finite element (FE) method introducing a high-fidelity space $V_h \subset V$ of dimension $\dim(V_h) = N_h < \infty$ as: find $u_h(\mu) \in V_h$ such that

$$a(u_h(\mu), v_h; \mu) = F(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{3}$$

Although problem (2) is well-posed for any choice of $\mu > 0$, when dealing with advection-dominated problems, i.e. when $|\mathbf{b}|/\mu \ll 1$, it is well recognized that (3) yields spurious numerical oscillations unless *(i)* a sufficiently fine mesh is considered, or *(ii)* suitable stabilization techniques are introduced. In this paper, we consider the latter option; hence, we seek $u_h^S(\mu) \in V_h$ such that