Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 555–560

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Partial Differential Equations

# Application of global Carleman estimates with rotated weights to an inverse problem for the wave equation

Anna Doubova [a], Axel Osses [b]

[a] *Departamento E.D.A.N., University of Sevilla, Aptdo. 1160, 41080 Sevilla, Spain*
[b] *Departamento de Ingenería Matemática, University of Chile, Casilla 170/3, correo 3, Santiago, Chili*

Received 28 June 2005; accepted after revision 14 September 2005

Available online 13 October 2005

Presented by Gilles Lebeau

**Abstract**

We establish geometrical conditions for the inverse problem of determining a stationary potential in the wave equation with Dirichlet data from a Neumann measurement on a suitable part of the boundary. We present the stability results when we measure on a part of the boundary satisfying a rotated exit condition. The proofs rely on global Carleman estimates with angle type dependence in the weight functions. ***To cite this article: A. Doubova, A. Osses, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***
© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

**Résumé**

**Application d'une inégalité de Carleman globale avec des poids à direction variable à un problème inverse pour l'équation des ondes.** On établit des conditions geométriques pour le problème inverse consistant à déterminer un potentiel stationnaire dans l'équation des ondes avec une donnée de Dirichlet et à partir d'une mesure de Neumann sur une partie appropriée de la frontière. On présente des résultats de stabilité quand on mesure sur une partie de la frontière satisfaisant une condition sortante à directions variables. Les démonstrations réposent sur des inégalités de Carleman globales avec des fonctions poids qui dépendent d'un angle comme paramètre. ***Pour citer cet article : A. Doubova, A. Osses, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***
© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

## Version française abrégée

Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega$ de classe $C^2$, $\Gamma_0$ une partie ouverte non vide de $\partial\Omega$, $\nu$ la normale unitaire extérieure à $\Omega$, $T > 0$ et $\mathcal{U}_M = \{q \in L^\infty(\Omega)\colon\ \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M\}$, où $M > 0$ est une constante. On s'intéresse à la stabilité du problème inverse suivant : *Etant donné $u_0$, $u_1$, $h$ et $\xi$ dans des espaces appropriés, on cherche des conditions suffisantes sur $\Gamma_0$ et $T$ telles qu'il existe $q \in \mathcal{U}_M$ tel que la solution $u$ de l'équation des ondes*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u + q(x)\,u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u = h & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0, \quad \partial_t u(x,0) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

*E-mail addresses:* doubova@us.es (A. Doubova), axosses@dim.uchile.cl (A. Osses).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2005.09.022

*satisfait la condition additionnelle*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \xi \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T). \tag{2}$$

On dénote par $u$ et $\bar{u}$ les solutions de (1) associées à $q$ et à un potentiel connu $\bar{q}$ respectivement. Si $f = q - \bar{q}$ et $y = u - \bar{u}$ alors $qu - \bar{q}\,\bar{u} = qy + f\,\bar{u}$ et le problème inverse correspondant pour la fonction $y$ est : *Etant donné $q \in \mathcal{U}_M$, $R = -\bar{u}$ et $\bar{\xi} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}$ dans des espaces appropriés, on cherche des conditions suffisantes sur $\Gamma_0$ et $T$ telles qu'il existe une fonction indépendante du temps $f$ telle que la solution $y$ de*

$$\begin{cases} \partial_{tt} y - \Delta y + q(x)\, y = f(x)\, R(x,t) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ y(x, 0) = \partial_t y(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3}$$

satisfait la condition additionnelle

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = \xi - \bar{\xi} \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T). \tag{4}$$

Dans [9] et [5] on démontre des résultats de stabilité quand $\Gamma_0$ inclut la région sortante (voir [7]) de la frontière par rapport à un certain point $x_0$ (voir Fig. 1 gauche). Dans cette Note on étend les hypothèses géométriques précédentes au sens qu'il suffit que $\Gamma_0$ contienne une partie de la frontière satisfaisant une condition décrite par un paramètre d'angle $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, voir (12). Si $\theta = 0$ on récupère la condition sortante précédente. Pour $\theta \to \pi/2$ ou $\theta \to -\pi/2$ on obtient par exemple des conditions plus générales (voir Fig. 1 centre).

**Théorème 0.1.** *On suppose que $\Gamma_0$ vérifie* (12). *On considère $u$ et $\bar{u}$ les solutions de* (1) *associées à $q \in \mathcal{U}_M$ et à un potentiel connue $\bar{q} \in L^\infty(\Omega)$ respectivement et avec des mesures $\xi$ données par* (2) *et $\bar{\xi} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}$. Il existe un temps $T_1 = T_1(\Omega, \theta, x_0) > 0$ tel que si $T > T_1$, $\bar{u} \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ et $|\bar{u}(x, 0)| \geqslant \alpha_0 > 0$ presque partout dans $\Omega$, alors il existe une constante $C = C(T, M, \|\bar{q}\|_{L^\infty}, \|\bar{u}\|_{H^1(L^\infty)}, \alpha_0) > 0$ telle que*

$$\|q - \bar{q}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\, \big\|\xi - \bar{\xi}\big\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))} \quad \forall q \in \mathcal{U}_M. \tag{5}$$

La preuve de ce résultat est un cas particulier du théorème suivant. Il suffit de prendre $f = q - \bar{q}$ et d'utiliser le fait que la constante de stabilité dans (6) ne dépend que de $M$.

**Théorème 0.2.** *On suppose que $\Gamma_0$ et $T$ vérifient les hypothèses du Théorème* 0.1. *Soient $f \in L^2(\Omega)$, $R \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ avec $\|\partial_t R\|_{L^2(L^\infty)} \leqslant M_1$ et $|R(x, 0)| \geqslant \alpha_0 > 0$ presque partout dans $\Omega$. Alors, il existe une constante $C = C(T, M, M_1, \alpha_0) > 0$ telle que si $y$ est la solution de* (3) *on a*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \left\| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))} \quad \forall q \in \mathcal{U}_M. \tag{6}$$

La démonstration est basée sur une inégalité globale de Carleman pour l'équation des ondes (Proposition 2.1). On utilise aussi les arguments de [5,9] pour l'appliquer au problème inverse. Les démonstrations détaillées des théorèmes précédents seront données dans [2].

## 1. Introduction and main results

Let $\Omega$ be a bounded open subset of $\mathbb{R}^2$ with boundary $\partial\Omega$ of class $C^2$, $\Gamma_0$ a nonempty open subset of $\partial\Omega$, $\nu$ the unit outward normal vector to $\Omega$, $T > 0$ and $\mathcal{U}_M = \{q \in L^\infty(\Omega)\colon \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M\}$, where $M > 0$ is a constant. We are interested in the stability of the following inverse problem: *Given $u_0$, $u_1$, $h$ and $\xi$ in appropriate spaces, we look for sufficient conditions under $\Gamma_0$ and $T$ such that we can find $q \in \mathcal{U}_M$ such that the solution $u$ of the wave equation*

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u + q(x)\, u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = h & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0, \quad \partial_t u(x, 0) = u_1 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{7}$$

Download English Version:

https://daneshyari.com/en/article/9519475

Download Persian Version:

https://daneshyari.com/article/9519475

Daneshyari.com