Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 35–38

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Topologie différentielle

# 4-variétés parallélisables sans structure complexe dont l'espace twistoriel est complexe

Guillaume Deschamps

*UFR de mathématiques, université Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France*

Reçu le 12 mars 2005 ; accepté après révision 22 mai 2005

Disponible sur Internet le 28 juin 2005

Présenté par Étienne Ghys

**Résumé**

Le but de cette Note est de donner quelques applications de la théorie des espaces twistoriels à l'existence ou l'inexistence de structures complexes. Ainsi, on précise le résultat de Yau [Topology 15 (1976) 51–53] en donnant la liste complète des 4-variétés réelles compactes parallélisables munies d'une structure complexe. À l'inverse, on explicite une famille de 4-variétés parallélisables sans structure complexe, mais dont le produit avec la sphère $\mathbb{S}^2$ est complexe. ***Pour citer cet article : G. Deschamps, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***



**Abstract**

**Parallelizable 4-manifolds without complex structure whose twistor space is complex.** The aim of this Note is to give some applications of twistor theory about existence or non-existence of complex structures. We slightly improve Yau's result [Topology 15 (1976) 51–53] by giving the full list of compact parallelizable real 4-manifolds with a complex structure. On the other hand, we give a family of parallelizable 4-manifolds without complex structure but whose product with the sphere $\mathbb{S}^2$ is complex. ***To cite this article: G. Deschamps, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***



## 1. Introduction

À toute 4-variété riemannienne orientée $(M, g)$, on associe son fibré twistoriel $\pi : \tau(M, g) \to M$ de fibre en $m \in M$ l'ensemble des structures complexes sur l'espace tangent $T_m M$ de $M$ au point $m$, qui respectent l'orientation et la métrique. C'est un fibré lisse localement trivial en sphères $\mathbb{S}^2$ de groupe structural $SO(3)$. Une section globale est une structure presque complexe sur $M$.

*Adresse e-mail :* guillaume.deschamps@univ-rennes1.fr (G. Deschamps).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2005.05.027

L'espace twistoriel $\tau(M,g)$ admet une structure presque complexe canonique qui est intégrable si et seulement si la métrique $g$ est anti-autoduale [1]. Dans cet article, on se sert de ce procédé pour mettre des structures complexes sur des produits $M \times \mathbb{S}^2$, où $M$ n'est pas complexe.

Pour cela, on caractérise les variétés dont le fibré twistoriel est topologiquement trivial. Cela nous amène à définir la notion de variété presque quaternionique.

En utilisant un théorème de Wu et la classification de Kodaira, on obtient la liste des surfaces compactes complexes presque quaternioniques dont la caractéristique d'Euler est nulle, c'est-à-dire des surfaces complexes à fibré tangent topologiquement trivial. On donne enfin une famille d'exemples de 4-variétés parallélisables sans structure complexe dont l'espace twistoriel est complexe.

*Dans toute la suite on dira qu'un fibré est trivial s'il est topologiquement trivial.*

## 2. Fibré twistoriel trivial

On peut montrer que si une 4-variété orientée admet une métrique $g$ telle que $\tau(M,g)$ est trivial, alors pour toute métrique $h$ sur $M$ le fibré twistoriel associé à $(M,h)$ sera aussi trivial [1]. Pour autant si on change l'orientation de $M$, son espace twistoriel peut ne plus être trivial (penser aux surfaces $K3$). On parlera donc de 4-variétés orientées à fibré twistoriel trivial sans préciser de métrique sur $M$.

**Définition 2.1.** Une 4-variété orientée $M$ est presque quaternionique s'il existe trois structures presque complexes $I$, $J$ et $K$ qui respectent l'orientation et telles que $IJ = -JI = K$.

En d'autres termes, $M$ est presque quaternionique si l'espace tangent en tout point possède une structure d'espace vectoriel quaternionique respectée par l'action du groupe structural. Ce qui revient à dire que le groupe structural du fibré tangent de $M$ se réduit à $\mathrm{SU}(2)$.

**Proposition 2.2.** *Le fibré twistoriel d'une* 4*-variété orientée est trivial si et seulement si $M$ est presque quaternionique.*

**Proposition 2.3.** *Une* 4*-variété $M$ est parallélisable si et seulement si elle est presque quaternionique et de caractéristique d'Euler nulle.*

**Démonstration.** Si $X$ est un champ de vecteurs partout non nul, $(X, IX, JX, KX)$ est une base de champs de vecteurs de $M$. $\square$

## 3. Surfaces compactes complexes parallélisables

Le théorème de Wu ([8], Chapitre IV §1, Théorème 11) et la classification de Kodaira permettent de donner la liste des surfaces compactes complexes dont le fibré twistoriel est trivial. On se contente ici de donner la liste des 4-variétés compactes parallélisables qui admettent une structure complexe. Ce résultat est un peu plus précis que celui de Yau [7], dans la mesure où il donne non pas les surfaces complexes susceptibles d'être parallélisables, mais toutes les surfaces parallélisables.

**Théorème 3.1.** *Les seules surfaces compactes complexes $M$ parallélisables en tant que variétés réelles sont* :

(a) *si* $\mathrm{Kod}(M) = -\infty$ : *les surfaces réglées de genre* 1 *spin, les surfaces d'Inoue, les surfaces de Hopf primaires et les surfaces de Hopf secondaires qui sont spin* ;