Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 747–750

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Résolution du problème des arcs de Nash pour les points doubles rationnels D_n

Camille Plénat

Département de mathématiques, faculté des sciences du Maine, 72085 Le Mans cedex 9, France

Reçu le 24 janvier 2005 ; accepté après révision le 13 avril 2005

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Cette Note a pour objet le problème des arcs de Nash, selon lequel il y aurait autant de familles d'arcs sur un germe de surface singulier U que de composantes essentielles d'une désingularisation de cette singularité. On résout le problème par l'affirmative pour les points doubles rationnels D_n $(n \geqslant 4)$. ***Pour citer cet article : C. Plénat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

A solution to the Nash problem of arcs for rational double points D_n. This Note deals with the Nash problem, which claims that there are as many families of arcs on a singular germ of surface U as there are essential components of the exceptional divisor in the desingularisation of this singularity. We prove that this claim holds for the rational double points D_n $(n \geqslant 4)$. ***To cite this article: C. Plénat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

A la fin des années soixante, Nash a introduit l'étude de l'espace des arcs $\mathcal{H}$ tracés sur une variété singulière S, ayant pour origine un point singulier de celle-ci, dans un préprint non publié à l'époque (mais paru depuis [5]). Un arc est un k-morphisme $\phi : \operatorname{spec} k[[t]] \to S$ et $\phi(0)$ est appelé son origine. Il a notamment posé le problème suivant :

Problème 1.1 (Nash). *Y a-t-il autant de courbes exceptionnelles dans la* **désingularisation minimale** *d'une singularité de surface normale* (S, s) *que de composantes irréductibles de* $\mathcal{H}$ *?*

Adresse e-mail : camille.plenat@univ-lemans.fr (C. Plénat).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.04.023

Ces composantes irréductibles coincident avec les familles d'arcs telles qu'elles sont définies par Nash dans [5].

Or Nash a défini l'application $M:\{\text{familles d'arcs}\} \to \{\text{composantes irréductibles du diviseur exceptionnel}\}$ qui associe au point générique d'une famille d'arcs le diviseur irréductible exceptionnel sur lequel l'arc se relève et il a montré que cette application était injective [2,5] ; il suffit donc de démontrer que c'est une bijection pour résoudre le problème.

Soit $\bigcup E_\alpha$ l'image inverse du point singulier s dans la désingularisation minimale de S, où les E_α sont les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel. On utilise la décomposition canonique de l'espace des arcs, $\mathcal{H} = \bigcup \overline{N_\alpha}$ où N_α est la famille des arcs tels que leur transformée stricte est transverse à E_α et n'intersecte aucun E_β, $\beta \neq \alpha$ (ces familles sont des ensembles irréductibles de $\mathcal{H}$ (cf. [3,9])). Par construction, il y a autant d'ensembles irréductibles $\overline{N}_\alpha$ que de diviseurs exceptionnels ; donc le problème de Nash se ramène à montrer que $\overline{N_\alpha} \not\subset \overline{N_\beta}$ pour tout couple $\alpha \neq \beta$.

Remarque 1. Pour résoudre le problème des arcs de Nash, on peut aussi considérer l'ensemble des arcs tronqués « suffisamment » loin. Si on montre que pour un certain i les familles « tronquées » à l'ordre i sont non incluses les unes dans les autres, on aura résolu le problème de Nash (voir preuve facile dans [9]).

Afin de résoudre un certain nombre de non-inclusions, on applique d'abord le critère valuatif suivant, suffisant pour distinguer certaines familles (cf. [6]) et qui (dans le cas des singularités rationnelles) permet d'ordonner partiellement les familles d'arcs.

Lemme 1.2 (Critère valuatif). *Soit $(S,0)$ une singularité normale de surface. Soient $p:(X,(E_j)) \to (S,0)$ une désingularisation de $(S,0)$, E_i, E_j deux composantes irréductibles de $p^{-1}(0)$.*

S'il existe $f \in \mathcal{O}_{(S,0)}$ telle que $\mathrm{ord}_{E_i}(f) < \mathrm{ord}_{E_j}(f)$, alors $\overline{N_i}(S) \not\subset \overline{N_j}(S)$.

L'ordre partiel induit par cette condition sur les familles d'arcs est le suivant : « $\overline{N_\alpha} < \overline{N_\beta}$ » si pour tout $f \in \mathcal{O}_{(S,0)}$, $\mathrm{ord}_{E_\alpha}(f) \leqslant \mathrm{ord}_{E_\beta}(f)$ et il existe $f \in \mathcal{O}_{(S,0)}$ telle que l'inégalité est stricte. Si aucune des inégalités « $\overline{N_\alpha} < \overline{N_\beta}$ » et « $\overline{N_\beta} < \overline{N_\alpha}$ » ne sont satisfaites, alors on dit que les familles sont incomparables.

Quelques avancées ont été réalisées : Reguera (dans [9]) a répondu par l'affirmative pour les singularités minimales de surface. Plus récemment, Ishii et Kollar ont obtenu une réponse positive au problème posé par Nash dans [5] pour les singularités toriques et ont donné un « contre-exemple » en dimension supérieure ou égale à quatre (cf. [2]). Pour le problème de Nash pour les singularités sandwich, on peut voir les articles [4,10] ou pour une solution partielle l'article [1]. Enfin, en 2004, avec Popescu-Pampu, nous avons trouvé une nouvelle classe de singularités de surface normales non rationnelles pour lesquelles le problème trouve une solution affirmative (cf. [8]).

Dans cette Note, on donne une preuve (dont on donne plus de détails dans [7]) pour les points doubles rationnels de surface D_n $(n \geqslant 4)$.

2. Les points doubles rationnels D_n

On va considérer la singularité D_n plongée dans $\mathbb{C}^3$, définie par l'équation $f = z^2 - x(y^2 + x^{n-2}) = 0$; son graphe dual de résolution (pour n pair) est décrit sur la Fig. 1. La donnée d'un arc d'origine 0 sur la singularité D_n est équivalente à la donnée de trois séries formelles :

$$x(t) = a_1t + a_2t^2 + \cdots,$$
$$y(t) = b_1t + b_2t^2 + \cdots,$$
$$z(t) = c_1t + c_2t^2 + \cdots$$