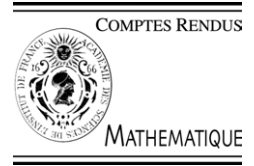




Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 15–19



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Algèbre homologique

# Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories

Goncalo Tabuada<sup>1</sup>

Université Paris 7 – Denis Diderot, UMR 7586 du CNRS, case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

Reçu le 30 juillet 2004 ; accepté après révision le 2 novembre 2004

Disponible sur Internet le 19 décembre 2004

Présenté par Christophe Soulé

---

## Résumé

Nous construisons une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant sur la catégorie des petites catégories différentielles graduées. *Pour citer cet article* : G. Tabuada, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).  
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**A Quillen model structure on the category of dg categories.** We construct a cofibrantly generated Quillen model structure on the category of small differential graded categories. *To cite this article*: G. Tabuada, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).  
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

Let  $k$  be a commutative ring with unit. By a *dg category*, we mean a differential graded  $k$ -category [6,2]. Let **DCAT** be the category of small dg categories.

We will introduce a cofibrantly generated Quillen model structure on **DCAT** such that the weak equivalences will be the quasi-equivalences [6]. We will use the recognition theorem stated in [4, 2.1.19]. We now introduce the notations needed to define the sets  $I$  (resp.  $J$ ) of generating cofibrations (resp. acyclic generating cofibrations).

Following [2, 3.7.1], we define  $\mathcal{K}$  to be the dg category that has two objects 1, 2 and whose morphisms are generated by  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^0(1, 2)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^0(2, 1)$ ,  $r_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-1}(1, 1)$ ,  $r_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-1}(2, 2)$  and  $r_{12} \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-2}(1, 2)$  subject to the relations  $df = dg = 0$ ,  $dr_1 = gf - \mathbf{1}_1$ ,  $dr_2 = fg - \mathbf{1}_2$  and  $dr_{12} = fr_1 - r_2f$ . Let  $\mathcal{A}$  be the dg

---

Adresse e-mail : [tabuada@math.jussieu.fr](mailto:tabuada@math.jussieu.fr) (G. Tabuada).

<sup>1</sup> Soutenu par FCT-Portugal, bourse SFRH/BD/14035/2003.

category with one object 3, such that  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(3, 3) = k$ . Let  $F$  be the dg functor from  $\mathcal{A}$  to  $\mathcal{K}$  that sends 3 to 1. Let  $\mathcal{B}$  be the dg category with two objects 4 and 5 such that  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(4, 4) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(5, 5) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(4, 5) = 0$  and  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(5, 4) = 0$ . Let  $n \in \mathbb{Z}$ . Let  $S^{n-1}$  be the complex  $k[n-1]$  and let  $D^n$  be the mapping cone on the identity of  $S^{n-1}$ . We denote by  $\mathcal{P}(n)$  the dg category with two objects 6 and 7 such that  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6, 6) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7, 7) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7, 6) = 0$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6, 7) = D^n$  and with composition given by multiplication. Let  $R(n)$  be the dg functor from  $\mathcal{B}$  to  $\mathcal{P}(n)$  that sends 4 to 6 and 5 to 7. Let  $\mathcal{C}(n)$  be the dg category with two objects 8 and 9 such that  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8, 8) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9, 9) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9, 8) = 0$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8, 9) = S^{n-1}$  and composition given by multiplication. Let  $S(n)$  be the dg functor from  $\mathcal{C}(n)$  to  $\mathcal{P}(n)$  that sends 8 to 6, 9 to 7 and  $S^{n-1}$  to  $D^n$  by the identity on  $k$  in degree  $n-1$ . Finally, let  $Q$  be the dg functor from the empty dg category  $\mathcal{O}$ , which is the initial object in **DCAT**, to  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 0.1.** *If we consider for  $\mathcal{C}$  the category **DCAT**, for  $W$  the subcategory of quasi-equivalences, for  $J$  the dg functors  $F$  and  $R(n), n \in \mathbb{Z}$ , and for  $I$  the dg functors  $Q$  and  $S(n), n \in \mathbb{Z}$ , then the conditions of the recognition theorem [4, 2.1.19] are fulfilled. Thus, the category **DCAT** admits a Quillen model structure whose weak equivalences are the quasi-equivalences.*

An analogous result for simplicial categories has been obtained in [1]. Our construction is inspired by the main result of [7] first discovered in [5] and by the construction of  $DG$ -quotients in [2]. One can easily show that for this structure, every object is fibrant. Using Theorem 0.1 Toën has described the Dwyer–Kan localization [3] of **DCAT** in [9].

### 1. Préliminaires

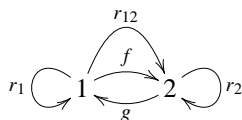
Dans toute la suite,  $k$  désigne un anneau commutatif avec 1. Le produit tensoriel  $\otimes$  désigne toujours le produit tensoriel sur  $k$ . Par une *dg-catégorie*, nous entendons une  $k$ -catégorie différentielle graduée, voir [6,2]. Soit **DCAT** la catégorie des petites dg-catégories. Un dg-foncteur  $F$  de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  est une *quasi-équivalence* si :

- pour tous objects  $c_1$  et  $c_2$  dans  $\mathcal{C}$ , le morphisme de complexes de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$  vers  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c_1), F(c_2))$  est un quasi-isomorphisme et
- le foncteur  $H^0(F)$  de  $H^0(\mathcal{C})$  vers  $H^0(\mathcal{D})$  est essentiellement surjectif.

Pour les catégories de modèles de Quillen, nous renvoyons à [4]. On introduira une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant dans **DCAT** dont les équivalences faibles sont les quasi-équivalences. Pour cela, on se servira du Théorème 2.1.19 de [4].

### 2. Théorème principal

Suivant [2, 3.7.1], nous définissons  $\mathcal{K}$  comme la dg-catégorie avec deux objets 1, 2 et dont les morphismes sont engendrés par  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^0(1, 2)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^0(2, 1)$ ,  $r_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-1}(1, 1)$ ,  $r_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-1}(2, 2)$  et  $r_{12} \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{-2}(1, 2)$  soumis aux relations  $df = dg = 0$ ,  $dr_1 = gf - \mathbf{1}_1$ ,  $dr_2 = fg - \mathbf{1}_2$  et  $dr_{12} = fr_1 - r_2f$ .



Soit  $\mathcal{A}$  la dg-catégorie avec un seul object 3 et telle que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(3, 3) = k$ . Soit  $F$  le dg-foncteur de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{K}$  qui envoie 3 sur 1. Soit  $\mathcal{B}$  la dg-catégorie avec deux objects 4 et 5 telle que  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(4, 4) = k$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(5, 5) = k$ ,

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/9519880>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/9519880>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)