Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 15–19
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre homologique

Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories

Goncalo Tabuada [1]

Université Paris 7 – Denis Diderot, UMR 7586 du CNRS, case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

Reçu le 30 juillet 2004 ; accepté après révision le 2 novembre 2004

Disponible sur Internet le 19 décembre 2004

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous construisons une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant sur la catégorie des petites catégories différentielles graduées. ***Pour citer cet article : G. Tabuada, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

A Quillen model structure on the category of dg categories. We construct a cofibrantly generated Quillen model structure on the category of small differential graded categories. ***To cite this article: G. Tabuada, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

Let k be a commutative ring with unit. By a *dg category*, we mean a differential graded k-category [6,2]. Let **DCAT** be the category of small dg categories.

We will introduce a cofibrantly generated Quillen model structure on **DCAT** such that the weak equivalences will be the quasi-equivalences [6]. We will use the recognition theorem stated in [4, 2.1.19]. We now introduce the notations needed to define the sets I (resp. J) of generating cofibrations (resp. acyclic generating cofibrations).

Following [2, 3.7.1], we define $\mathcal{K}$ to be the dg category that has two objects 1, 2 and whose morphisms are generated by $f \in \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(1,2)$, $g \in \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(2,1)$, $r_1 \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(1,1)$, $r_2 \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(2,2)$ and $r_{12} \in \mathrm{Hom}^{-2}_{\mathcal{K}}(1,2)$ subject to the relations $\mathrm{d}f = \mathrm{d}g = 0$, $\mathrm{d}r_1 = gf - \mathbf{1}_1$, $\mathrm{d}r_2 = fg - \mathbf{1}_2$ and $\mathrm{d}r_{12} = fr_1 - r_2 f$. Let $\mathcal{A}$ be the dg

Adresse e-mail : tabuada@math.jussieu.fr (G. Tabuada).
[1] Soutenu par FCT-Portugal, bourse SFRH/BD/14035/2003.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.11.007

category with one object 3, such that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(3,3)=k$. Let F be the dg functor from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{K}$ that sends 3 to 1. Let $\mathcal{B}$ be the dg category with two objects 4 and 5 such that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(4,4)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(5,5)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(4,5)=0$ and $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(5,4)=0$. Let $n\in\mathbb{Z}$. Let S^{n-1} be the complex $k[n-1]$ and let D^n be the mapping cone on the identity of S^{n-1}. We denote by $\mathcal{P}(n)$ the dg category with two objects 6 and 7 such that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6,6)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7,7)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7,6)=0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6,7)=D^n$ and with composition given by multiplication. Let $R(n)$ be the dg functor from $\mathcal{B}$ to $\mathcal{P}(n)$ that sends 4 to 6 and 5 to 7. Let $\mathcal{C}(n)$ be the dg category with two objects 8 and 9 such that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8,8)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9,9)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9,8)=0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8,9)=S^{n-1}$ and composition given by multiplication. Let $S(n)$ be the dg functor from $\mathcal{C}(n)$ to $\mathcal{P}(n)$ that sends 8 to 6, 9 to 7 and S^{n-1} to D^n by the identity on k in degree $n-1$. Finally, let Q be the dg functor from the empty dg category $\mathcal{O}$, which is the initial object in **DCAT**, to $\mathcal{A}$.

Théorème 0.1. *If we consider for $\mathcal{C}$ the category* **DCAT**, *for W the subcategory of quasi-equivalences, for J the dg functors F and $R(n), n\in\mathbb{Z}$, and for I the dg functors Q and $S(n), n\in\mathbb{Z}$, then the conditions of the recognition theorem* [4, 2.1.19] *are fulfilled. Thus, the category* **DCAT** *admits a Quillen model structure whose weak equivalences are the quasi-equivalences.*

An analogous result for simplicial categories has been obtained in [1]. Our construction is inspired by the main result of [7] first discovered in [5] and by the construction of DG-quotients in [2]. One can easily show that for this structure, every object is fibrant. Using Theorem 0.1 Toën has described the Dwyer–Kan localization [3] of **DCAT** in [9].

1. Préliminaires

Dans toute la suite, k désigne un anneau commutatif avec 1. Le produit tensoriel $\otimes$ désigne toujours le produit tensoriel sur k. Par une *dg-catégorie*, nous entendons une k-catégorie différentielle graduée, voir [6,2]. Soit **DCAT** la catégorie des petites dg-catégories. Un dg-foncteur F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est une *quasi-équivalence* si :

- pour tous objects c_1 et c_2 dans $\mathcal{C}$, le morphisme de complexes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1,c_2)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c_1),F(c_2))$ est un quasi-isomorphisme et
- le foncteur $\mathrm{H}^0(F)$ de $\mathrm{H}^0(\mathcal{C})$ vers $\mathrm{H}^0(\mathcal{D})$ est essentiellement surjectif.

Pour les catégories de modèles de Quillen, nous renvoyons à [4]. On introduira une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant dans **DCAT** dont les équivalences faibles sont les quasi-équivalences. Pour cela, on se servira du Théorème 2.1.19 de [4].

2. Théorème principal

Suivant [2, 3.7.1], nous définissons $\mathcal{K}$ comme la dg-catégorie avec deux objets 1, 2 et dont les morphismes sont engendrés par $f\in\mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(1,2)$, $g\in\mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(2,1)$, $r_1\in\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(1,1)$, $r_2\in\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(2,2)$ et $r_{12}\in\mathrm{Hom}^{-2}_{\mathcal{K}}(1,2)$ soumis aux relations $\mathrm{d}f=\mathrm{d}g=0$, $\mathrm{d}r_1=gf-\mathbf{1}_1$, $\mathrm{d}r_2=fg-\mathbf{1}_1$ et $\mathrm{d}r_{12}=fr_1-r_2f$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "r_1"] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend left=60, "r_{12}"] & 2 \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[loop right, "r_2"] \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{A}$ la dg-catégorie avec un seul object 3 et telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(3,3)=k$. Soit F le dg-foncteur de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{K}$ qui envoie 3 sur 1. Soit $\mathcal{B}$ la dg-catégorie avec deux objects 4 et 5 telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(4,4)=k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(5,5)=k$,