Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 27–30

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Partial Differential Equations

On Poincaré's and J.L. Lions' lemmas

Srinivasan Kesavan

The Institute of Mathematical Sciences, CIT Campus, Taramani, Chennai – 600 113, India

Received 12 November 2004; accepted 19 November 2004

Available online 22 December 2004

Presented by Philippe G. Ciarlet

Abstract

Let Ω be a bounded, connected and simply connected open subset of $\mathbb{R}^N$ with a Lipschitz continuous boundary. It is shown that an irrotational vector field whose components are in $H^{-1}(\Omega)$ is the gradient of a function in $L^2(\Omega)$. It is also shown that this generalization of a classical lemma of Poincaré is equivalent to a well-known lemma of J.L. Lions. ***To cite this article: S. Kesavan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Résumé

Sur les lemmes de Poincaré et de J.L. Lions. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ connexe et simplement connexe à frontière lipschitzienne. On montre qu'un champ vectoriel à composantes dans $H^{-1}(\Omega)$ dont le rotationnel est nul est le gradient d'une fonction dans $L^2(\Omega)$. On montre que cette généralisation d'un lemme classique de Poincaré est equivalent à un lemme très connu de J.L. Lions. ***Pour citer cet article : S. Kesavan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Version française abrégée

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N,\ N \geqslant 2$, connexe et simplement connexe à frontière lipschitzienne au sens de Nečas [5]. Un lemme classique de Poincaré affirme qu'un champ vectoriel à composantes dans $C^1(\Omega)$ dont le rotationnel est nul est le gradient d'une fonction dans $C^2(\Omega)$. Ce résultat à été généralisé par Girault et Raviart [4] au cas des champs dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et, plus récemment, par Ciarlet et Ciarlet Jr. [2] au cas des champs dans $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ lorsque $N = 3$. Nous allons démontrer ce dernier résultat pour $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, pour tout entier $N \geqslant 2$.

Théorème 0.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N \geqslant 2$, un ouvert borné connexe et simplement connexe à frontière lipschitzienne. Soit $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Alors, les énoncés suivants sont equivalents* :

E-mail address: kesh@imsc.res.in (S. Kesavan).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.11.021

(i) $\mathbf{curl}\,\mathbf{h} = \mathbf{0}$.
(ii) $\mathbf{h} = \mathbf{grad}\, p$ *où* $p \in L^2(\Omega)$.
(iii) $\langle \mathbf{h}, \mathbf{w}\rangle = 0$ *pour tout* $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *tel que* $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$*, où* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *désigne le produit de dualité entre* $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ *et* $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Idée de la démonstration. On reprend en partie la démarche de Ciarlet et Ciarlet Jr. [2]. On sait (cf. Girault et Raviart [4]) qu'ils existe $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que

$$-\Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad}\, p = \mathbf{h} \quad \text{dans } \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{1}$$

On utilise les hypothèses et l'hypoellipticité du laplacien pour en déduire facilement que $\Delta \mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ et que $\mathbf{curl}\,\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Donc, d'après le lemme classique de Poincaré, on en déduit que $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{grad}\, \tilde{p}$ où $\tilde{p} \in C^\infty(\Omega)$. Une application du lemme de Lions (cf. Duvaut et Lions [3] ou Amrouche et Girault [1]) nous permet de déduire que $\tilde{p} \in L^2(\Omega)$ et on conclut ainsi la démonstration de (i) implique (ii). La reciproque, ainsi que la démonstration de (ii) implique (iii) sont immédiates. Pour la démonstration de (iii) implique (ii), voir Girault et Raviart [4]. □

Remarque 1. L'equivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est connue sous le nom de *théorème de de Rham*. On n'a pas besoin de la simple connexité de Ω pour cette equivalence.

Corollaire 0.2. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *comme ci-dessus. Alors les énoncés suivants sont equivalents* :

(i) *Lemme de Poincaré dans* $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$: *Si* $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ *vérifie* $\mathbf{curl}\,\mathbf{h} = \mathbf{0}$*, alors* $\mathbf{h} = \mathbf{grad}\, p$*, où* $p \in L^2(\Omega)$.
(ii) *Lemme de Lions* : *Si* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *est tel que* $\mathbf{grad}\, f \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$*, alors* $f \in L^2(\Omega)$.

Démonstration. D'une part, on a vu dans la démonstration précédente que (ii) implique (i). D'autre part, puisque $\mathbf{curl}\,\mathbf{grad}\, f = \mathbf{0}$, on déduit du théorème précédent que $\mathbf{grad}\, f = \mathbf{grad}\, p$, où $p \in L^2(\Omega)$ et donc $f = p$ à une constante additive près. □

1. Introduction

Let Ω be a bounded, connected and simply connected open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, with a Lipschitz continuous boundary in the sense of Nečas [5]. A classical *lemma of Poincaré* states that an irrotational vector field with components in $C^1(\Omega)$ is the gradient of a function in $C^2(\Omega)$.

When $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, this has been generalised to irrotational vector fields with components in $L^2(\Omega)$ (as gradients of $H^1(\Omega)$ functions) by Girault and Raviart [4], and, more recently, to irrotational vector fields with components in $H^{-1}(\Omega)$ (as gradients of $L^2(\Omega)$ functions) by Ciarlet and Ciarlet Jr. [2].

Not only are such investigations interesting *per se*, but these results are also important in the study of solutions to the Stokes problem in fluid mechanics and in characterizing those symmetric second order tensors with components in $L^2(\Omega)$ that can arise as linearized strain tensors of displacement fields in elasticity (cf. [2]).

The aim of this Note is to give a proof of the result of [2] in any space dimension and to show that this result is equivalent to a well-known *lemma of Lions*. In all that follows, vectors in $\mathbb{R}^N$ and vector spaces whose elements are vector fields in $\mathbb{R}^N$ are denoted by boldface letters.

2. The main result

Theorem 2.1. *Let* Ω *be a bounded, connected and simply connected open subset of* $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, *with a Lipschitz continuous boundary. Let* $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$*. Then, the following are equivalent*: