Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 75–80
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Mathematical Problems in Mechanics

Incompressible nonlinearly elastic thin membranes

Karim Trabelsi

Laboratoire Jacques-Louis Lions, université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris cedex 05, France

Received 11 October 2004; accepted 1 November 2004

Available online 19 December 2004

Presented by Philippe G. Ciarlet

Abstract

Nonlinearly elastic thin membrane models are derived for hyperelastic incompressible materials using Γ-convergence arguments. We obtain an integral representation of the limit two-dimensional energy owing to a result of singular functionals relaxation due to Ben Belgacem [ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5 (2000) 71–85 (electronic)]. ***To cite this article: K. Trabelsi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***
© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Membranes minces non linéairement élastiques incompressibles. Des modèles de membranes minces non linéairement élastiques sont obtenus pour des matériaux hyperélastiques incompressibles via des arguments de Γ-convergence. Nous obtenons une représentation intégrale de l'énergie bidimensionnelle limite grâce à un résultat de relaxation de fonctionnelles singulières dû à Ben Belgacem [ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5 (2000) 71–85 (électronique)]. ***Pour citer cet article : K. Trabelsi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***
© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

On considère un corps élastique mince de la forme $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ dont la surface moyenne ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne et ε, son épaisseur, est le petit paramètre. On suppose que le corps est constitué d'un matériau hyperélastique incompressible dont la densité d'énergie est donnée par (1). Dans cette configuration la plaque subit une déformation $\varphi^\varepsilon : \overline{\Omega}^\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ qui devrait être une solution du problème (P^ε) où $J_\varepsilon(\varphi^\varepsilon) = I_\varepsilon(\varphi^\varepsilon) - \ell_\varepsilon(\varphi^\varepsilon)$, I_ε et ℓ_ε étant définies dans (2). Par ailleurs, on suppose que la fonction W obéit à des hypothèses de croissance et de coercivité données par (H). Par conséquence, l'espace des déformations admissibles est donné par (3) où la contrainte $\det \nabla\psi^\varepsilon = 1$ exprime l'incompressibilité du matériau. On remarque qu'aucune

E-mail address: trabelsi@ann.jussieu.fr (K. Trabelsi).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2004.11.005

hypothèse de convexité n'est faite sur W de sorte que la classe des énergies est assez grande pour inclure le matériau de Saint Venant–Kirchhoff, ainsi que les matériaux de type Ogden ; voir par exemple Ciarlet [6].

Le but de cette Note est d'étudier le comportement des suites minimisantes pour la suite d'énergies $(J_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sur les espaces $(\mathcal{V}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Pour ce faire, il est utile de se ramener à un domaine fixe. A cet effet, on opère le changement d'échelle π_ε défini par $(\pi_\varepsilon f)(x^1,x^2,x^3) = f(x^1,x^2,\varepsilon x^3)$ et on note $I(\varepsilon)(\psi) = \varepsilon^{-1} I^\varepsilon(\pi_\varepsilon\psi)$, $\ell(\varepsilon)(\psi) = \varepsilon^{-1}\ell^\varepsilon(\pi_\varepsilon\psi)$ et $\bar{J}(\varepsilon) = I(\varepsilon) - \ell(\varepsilon)$. De même, on définit $\Omega = \Omega^1$, $\Gamma_\pm = \Gamma_\pm^1$,$\Gamma = \Gamma^1$, $U = U^1$ et $x = (x_H, \xi) \in \omega \times [-1,1]$. De la sorte, l'espace des déformations admissibles est donné par (4). Enfin, on suppose que $b(\varepsilon) = b$ et $g(\varepsilon) = \varepsilon g$ pour simplifier. Mise à l'échelle ainsi, une suite minimisante $(\psi(\varepsilon))_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{V}(\varepsilon)$ de $\bar{J}(\varepsilon)$ vérifie (5) où h est une fonction positive telle que $h(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Le comportement asymptotique d'une telle suite est décrit par la Γ-limite de la suite de fonctionnelles $(\bar{J}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ par rapport à la topologie faible de $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$; voir De Giorgi [8] et Dal Maso [7]. Cependant, pour éviter de travailler avec la topologie faible de $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ qui n'est pas métrisable sur les ensembles non-bornés, il est classique d'étendre les énergies à $L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ comme dans (6).

Le résultat principal annoncé dans cette Note est la dérivation d'un modèle non linéaire membranaire de corps minces incompressibles par l'identification de la Γ-limite de la suite de fonctionnelles $(J(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$. Introduisons d'abord l'espace $\mathcal{M}(\omega) = \{\bar\varphi \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)\colon\ \bar\varphi_{,\xi} = 0 \text{ et } \bar\varphi_{|U}(x_H,\xi) = (x_H,0)\}$ des déformations membranaires. Alors on établit le Théorème 3.1. On remarque que l'énergie limite $J(0)$ ne dépend plus de la troisième variable ξ. De plus, la densité d'énergie $\mathbf{QR}W_0$ ne dépend que de la première forme fondamentale de la déformation. En ce sens, cette énergie décrit un corps élastique membranaire. La démonstration de ce théorème repose sur un résultat de Fonseca [9]. La motivation principale a été l'article [5] de Ben Belgacem concernant la relaxation de fonctionnelles singulières dont l'enveloppe rang-1-convexe est partout finie, ce qui est le cas pour W_0. Rappelons aussi que Ben Belgacem a aussi mené une analyse asymptotique semblable à la nôtre dans [3] pour un matériau compressible dont l'énergie vérifie $W(F) \to \infty$ si $\det F \to 0$; voir aussi [4]. La démonstration se fait par double inégalité ; c'est la démarche classique voir Le Dret et Raoult [11] et Acerbi et al. [1]. La borne inférieure est une conséquence aisée des propriétés des enveloppes rang-1-convexe et quasiconvexe. L'obtention de la borne supérieure est la difficulté principale. On commence par obtenir une borne supérieure valable pour des immersions, ensuite on passe par les applications affines par morceaux et localement injectives en affinant à chaque fois un peu plus la majoration avant d'aboutir à l'inégalite voulue. On fait aussi appel à un résultat de Kohn et Strang [10] et au théorème de recouvrement de Vitali.

Notons que l'énergie limite est séquentiellement semicontinue inférieurement faible dans $W^{1,p}(\omega;\mathbb{R}^3)$ par le théorème de relaxation dans [5] et aussi comme Γ-limite de fonctionnelles coercives. Une question naturelle s'impose : l'énergie bidimensionnelle $(\mathbf{QR}W)_0$ ne conviendrait-elle pas comme approximation ? N'éviterait-elle pas la relaxation ? La réponse est non, $\mathbf{R}W$ n'est pas finie et [5] n'est donc pas applicable. De plus, rien ne garantit que la fonctionnelle ainsi définie soit séquentiellement semicontinue inférieure faible dans $W^{1,p}(\omega;\mathbb{R}^3)$. Enfin, nous insistons sur le fait qu'il est inutile d'imposer une condition de convexité sur W puisqu'elle n'est pas en général héritée par W_0 ; voir par exemple Trabelsi [13].

Dans la Proposition 3.2, on montre que les propriétés essentielles requises pour W comme l'indifférence matérielle et l'isotropie sont transmises à $\mathbf{QR}W_0$. On remarque que comme dans le cas d'une énergie finie (Le Dret et Raoult [11]) ou singulière (Ben Belgacem [3,4]), la membrane incompressible ne résiste pas à la compression d'après le (iii) de la Proposition 3.2 ; voir aussi Trabelsi [12]

Les démonstrations complètes des résultats annoncés ainsi que d'autres remarques sont données dans Trabelsi [14].

1. Introduction

Let $(e_i)_{i=1,2,3}$ be an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$. Partial differentiation of a function or a vector field ψ with respect to the vector e_i is denoted $\psi_{,i}$ and its gradient (matrix) is denoted $\nabla\psi$. In its reference configuration, the

Download English Version:

https://daneshyari.com/en/article/9519891

Download Persian Version:

https://daneshyari.com/article/9519891

Daneshyari.com